

Funções de Variável Complexa

Semana 13

Sumário

9.5	Classificação de singularidades	231
-----	---	-----

9.5 Classificação de singularidades

Do teorema de Laurent, uma função f com singularidade isolada em z_0 admite a representação de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

para todo z no disco perfurado $0 < |z - z_0| < R$ onde f é analítica.

Nessa seção vamos usar essa série para classificar as singularidades isoladas de uma função analítica, bem como os zeros.

Definição

Considere f analítica em

$$0 < |z - z_0| < R,$$

com série de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

nesse conjunto.

A singularidade isolada z_0 é um zero de ordem $k \in \mathbb{N}$ da função f quando $a_k \neq 0$ e $a_n = 0$, para todo $n = k - 1, k - 2, \dots, 2, 1, 0, -1, -2, \dots$

Chamamos um zero de ordem um ($k = 1$) de zero simples.

A singularidade isolada z_0 é uma singularidade removível quando $a_n = 0$, para todo $n = -1, -2, \dots$

A singularidade isolada z_0 é um pólo de ordem $k \in \mathbb{N}$ quando $a_n = 0$, para todo $n = -k - 1, -k - 2, \dots$ e $a_{-k} \neq 0$.

Chamamos um pólo de ordem um ($k = 1$) de pólo simples.

A singularidade isolada z_0 é uma singularidade essencial quando a parte principal da série de Laurent de f tem infinitos termos não-nulos.

Uma função com um zero de ordem (ou multiplicidade) k no ponto z_0 terá a série de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

no disco perfurado $0 < |z - z_0| < R$. Escrevendo o novo índice $m = n - k$ podemos fatorar a série como

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_{m+k} (z - z_0)^{m+k} = (z - z_0)^k \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+k} (z - z_0)^m.$$

Observe que o primeiro termo da série é a_k que é não-nulo, logo a série define uma função g analítica em $|z - z_0| < R$ que não se anula em z_0 .

Teorema

z_0 é um zero de ordem k de f

\Leftrightarrow

existe uma função g analítica tal que

$$f(z) = (z - z_0)^k g(z), \quad g(z_0) \neq 0,$$

\Leftrightarrow

$$f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(k-1)}(z_0), \quad f^{(k)}(z_0) \neq 0.$$

Exemplo

A função $\sin(z^2)$ tem um zero de multiplicidade 2 em $z = 0$ pois

$$\sin(z^2) = \operatorname{sinc}(z^2)z^2,$$

e sinc é inteira e não se anula em $z = 0$.

Exemplo

A função nula $g(z) = 0$ não possui nenhum zero pela definição acima.

Isso porque todas as derivadas de g são nulas, logo não há nenhum k tal que $g^{(k)}(z) \neq 0$.

Precisamos falar sobre a função $g \equiv 0$.

Definimos singularidade isolada na seção anterior. Analogamente, um zero isolado de uma função analítica f é um ponto z_0 tal que numa vizinhança de z_0 a função não tem nenhum outro zero:

$$f(z_0) = 0, \quad f(z) \neq 0, \quad 0 < |z - z_0| < \rho.$$

Os zeros de g não são isolados (por que?). Na verdade g é a única função analítica com essa propriedade:

Teorema

Se f é analítica no conjunto conexo D , $z_0 \in D$ então vale a alternativa

- ou z_0 é um zero isolado de f ,
- ou $f \equiv 0$ em D .

O ponto chave é que f é analítica no ponto z_0 . A função $\sin(1/z)$ é analítica exceto na origem, ela tem uma sequência de zeros $z_n \rightarrow 0$. Se ela fosse analítica em $z = 0$, do teorema ela precisaria ser a função nula.

A aplicação do teorema para nós é que zeros de funções analíticas são isolados uns dos outros: se f não é a função nula, então para cada zero de f existe um disco no qual ele é o único zero.

A prova da alternativa acima usa a série de Taylor: suponha que f é analítica em z_0 e $f(z_0) = 0$, escrevendo sua série de Taylor centrada em z_0 temos

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

já que $a_0 = f(z_0) = 0$.

O conjunto

$$I = \{k \in \mathbb{N}; \quad a_0 = a_1 = \dots = a_k = 0\}$$

não é vazio, $0 \in I$. Além disso, se $k > 0 \in I$, então todos os números entre 0 e k estão em I .

Segue a alternativa

- ou I é um conjunto limitado,
- ou $I = \mathbb{N}$.

Suponha que I é limitado, escolha k tal que $I = \{0, 1, \dots, k - 1\}$, então $a_k \neq 0$.

Vimos acima que isso implica que z_0 é um zero de ordem k de f ,

$$f(z) = (z - z_0)^k g(z), \quad g(z_0) \neq 0,$$

e g é analítica. Daí em uma vizinhança de z_0 nenhum dos fatores se anula, e z_0 é isolado.

Suponha finalmente o outro caso, $I = \mathbb{N}$, então todos os coeficientes a_k são nulos.

Segue que a série de Taylor de f é igual à da função nula, e $f \equiv 0$.

Teorema

Se f e g são analíticas em D , z_n é uma sequência em D e

$$z_n \rightarrow z_0 \in D, \quad f(z_n) = g(z_n), \quad \forall n,$$

então $f \equiv g$ em D .

O resultado acima diz que se duas funções analíticas concordam em uma sequência de pontos e as funções são analíticas no limite da sequência, então as funções são iguais em todo o seu domínio comum.

Esse resultado é bastante forte. Por exemplo, se duas funções analíticas tem o mesmo valor sobre qualquer curva, elas são iguais.

Outra consequência é que dada uma função real $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ existe no máximo uma extensão analítica de φ a um aberto $D \supset I$.

Ele é consequência direta do teorema anterior: a função $f - g$ é analítica em z_0 e a sequência z_n é uma sequência de zeros de $f - g$. Por continuidade $(f - g)(z_0) = 0$ e concluímos que $f - g \equiv 0$.

Uma função com uma singularidade removível em z_0 terá a série de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

no disco perfurado $0 < |z - z_0| < R$. Não sabemos necessariamente que $a_0 \neq 0$, mas a série não apresenta potências negativas - dessa forma, a série de potências é analítica no ponto z_0 .

Para fixar as ideias: chamando de g a função definida apenas pela série de potências, g é analítica no disco completo, enquanto f a princípio não precisa estar definida no centro z_0 . A função g é uma extensão analítica de f para o disco aberto.

Teorema

Uma função f possui uma singularidade removível em z_0

\Leftrightarrow

existe uma extensão analítica de f para algum disco aberto $|z - z_0| < R$

\Leftrightarrow

f é limitada em algum disco perfurado $0 < |z - z_0| < R$.

A afirmação mais útil desse teorema é que quando f é limitada ela é analítica: em outras palavras, se $|f(z)|$ é controlado perto de z_0 , então f tem limite em z_0 e todas as suas derivadas também.

Exemplo

Nossa velha conhecida $\sin(z)/z$ tem uma única singularidade em $z_0 = 0$. Sabemos que ela é uma singularidade removível porque já mostramos (calculando a derivada artesanalmente) que a extensão *sinc*, com o valor $\text{sinc}(0) = 1$ é analítica em todo o plano.

Do teorema acima, bastaria verificar que

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1,$$

ou ainda olhar para a série de potências

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1+2n)!} z^{1+2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1+2n)!} z^{2n},$$

que não tem expoentes negativos, para concluir que 0 é singularidade removível.

Exemplo

A função $z/(1 - \exp z)$ é analítica em $z \neq 2k\pi i$.

Como conhecemos o limite

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\exp(z) - 1}{z} = \exp'(0) = 1,$$

segue que $z/(1 - \exp z)$ também tem limite 1 em $z = 0$. Portanto 0 é uma singularidade removível da função.

Uma função com um pólo de ordem k no ponto z_0 terá a série de Laurent centrada em z_0

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

válida no disco perfurado $0 < |z - z_0| < R$. Escrevendo o novo índice $n = m - k$ podemos fatorar a série como

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_{m-k} (z - z_0)^{m-k} = \frac{1}{(z - z_0)^k} \sum_{m=0}^{\infty} a_{m-k} (z - z_0)^m.$$

Observe que o primeiro termo da série é a_{-k} que é não-nulo, logo a série na direita define uma função g analítica em $|z - z_0| < R$ que não se anula em z_0 .

Teorema

z_0 é um pólo de ordem k de f se e somente se existe uma função g analítica tal que

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^k}, \quad g(z_0) \neq 0.$$

Pólos são o melhor tipo de singularidade.

Pólos são bastante parecidos com zeros. Lembre do começo do curso como as funções z^n e $1/z^n$ tem mapas de cores similares. Um resultado que liga pólos e zeros é

Teorema

A função f tem um pólo de ordem k em z_0 se e somente se a função $1/f$ tem um zero de ordem k em z_0 .

Da discussão acima, em um pólo de ordem k

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^k}, \quad g(z_0) \neq 0.$$

Segue que

$$(1/f)(z) = \frac{(z - z_0)^k}{g(z)}, \quad g(z_0) \neq 0,$$

de modo que $1/g$ é analítica no disco centrado em z_0 . Mas essa propriedade caracteriza um zero de ordem k .

f tem um pólo em z_0 se e somente se

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty.$$

Que em um pólo o limite é infinito nós deduzimos da equivalência acima entre zeros e pólos. Para a volta precisamos analisar as singularidades essenciais.

Exemplo

$$1/(1 - \cos z)$$

Como $h(z) = 1 - \cos z$ é analítica em $z = 0$, podemos calcular

$$h(0) = 0,$$

$$h'(z) = \sin z, \quad h'(0) = 0,$$

$$h''(z) = \cos z, \quad h''(0) = 1 \neq 0,$$

segue que h tem um zero de ordem 2 em $z = 0$. Portanto a função original tem um pólo de ordem 2 em $z = 0$.

Nos outros pólos de $1/(1 - \cos z)$, os pontos $z_m = 2m\pi$, como h é periódica, temos sempre zeros de ordem 2, que correspondem a pólos de ordem 2 da função inicial.

Vamos analisar singularidades essenciais através do exemplo

Exemplo

$$\exp(1/z).$$

Note que a função tem série de Laurent centrada em $z = 0$

$$\exp(1/z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n},$$

válida (convergente) no plano perfurado $|z| > 0$.

Como essa série tem parte principal infinita, $z = 0$ é uma singularidade essencial da função $\exp(1/z)$.

Vamos fazer $z \rightarrow 0$ por diferentes caminhos, primeiro escolha $z(t) = t^2$, então

$$\lim_{t \rightarrow 0} \exp(1/t^2) = \lim_{s \rightarrow +\infty} \exp(s^2) = \infty,$$

e $\exp(1/z)$ não é limitada na vizinhança de $z = 0$. Tomando $z(t) = -t^2$, isto é, nos aproximando pelo eixo real negativo,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \exp(1/(-t^2)) = \lim_{s \rightarrow \infty} \exp(-s^2) = 0,$$

assim o limite no zero não existe (diferente do caso dos pólos).

A situação perto de $z = 0$ é ainda mais complicada: lembrando que \exp é analítica com período complexo $2\pi i$, e assume todos os valores complexos exceto 0, podemos construir para cada $w \neq 0$ uma sequência

$$z_n = \text{Log}(w) + 2n\pi i,$$

com a propriedade

$$|z_n| \geq 2n\pi - |\text{Log}(w)| \rightarrow \infty,$$

$$\exp(z_n) = \exp(\text{Log}(w) + 2n\pi) = \exp(\text{Log}(w)) = w.$$

Escolhendo $v_n = 1/z_n = 1/(\text{Log}(w) + 2n\pi)$, temos

$$v_n \rightarrow 0, \quad \exp(1/v_n) \rightarrow w.$$

Portanto $\exp(1/z)$ assume todos os valores, exceto 0, em uma vizinhança arbitrariamente pequena de 0.

Não vamos entrar nos detalhes, mas o exemplo acima é ilustrativo do caso geral. O Grande Teorema de Picard diz que se f tem uma singularidade essencial em z_0 , então em qualquer vizinhança de z_0 a imagem de f contém todos os números complexos, exceto possivelmente por um único número.

No nosso exemplo essa exceção era $z = 0$.

Classificação de singularidades isoladas.

- Se não existe $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$, então z_0 é uma singularidade essencial de f .
- Se $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$, então z_0 é um pólo de f .
- Se existe $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 \in \mathbb{C}$, então z_0 é uma singularidade removível de f .

Comportamento de uma função em uma vizinhança do infinito

Uma vizinhança de ∞ é um anel da forma

$$|z| > R.$$

Dizemos que ∞ é uma singularidade isolada de f quando f for analítica em uma vizinhança da forma acima.

Por exemplo, toda função inteira tem uma singularidade isolada no infinito.

Por outro lado, a função Log não tem o infinito como singularidade isolada, novamente por causa do corte no domínio.