Funções de Variável Complexa

Mat46 2021 – Semana 3

Sumário

4 Derivação

A derivada complexa é um dos conceitos chave do curso. Apesar da semelhança na definição e regras de cálculo, a derivada real e a complexa são bem diferentes. Funções complexas que tem derivada em um conjunto aberto são a base da teoria que veremos até o final do curso - elas são chamadas de funções analíticas. Raramente precisaremos nos preocupar com funções que não são analíticas.

Definição

A derivada de $f : U \to \mathbb{C}$ em z_0 ponto interior de U é

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

caso o limite exista.

Escrevendo a parte real e imaginária do quociente dentro do limite acima, onde $z = x + iy$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$ e $f(z_0) = u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)$, temos

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{(f(z) - f(z_0))(\overline{z} - \overline{z}_0)}{|z - z_0|^2} = \frac{(f(z) - f(z_0))(\overline{z} - \overline{z}_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

$$= \frac{(u(x, y) - u(x_0, y_0))(x - x_0) + (v(x, y) - v(x_0, y_0))(y - y_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} +$$

$$+ i\frac{(u(x, y) - u(x_0, y_0))(y_0 - y) + (v(x, y) - v(x_0, y_0))(x - x_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

Precisamos calcular cada um dos limites acima para obter derivadas da definição. Veremos adiante regras mais práticas que vão ajudar no processo.

Exemplo

Seja $f(z) = z^2$, vamos verificar que $f'(z) = 2z$ como esperado.

Temos $f(z) = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$, logo $u(x,y) = x^2 - y^2$ e $v(x,y) = 2xy$.

Substituindo na diferença, temos

$$u(x,y) - u(x_0,y_0) = x^2 - y^2 - x_0^2 + y_0^2,$$

$$v(x,y) - v(x_0,y_0) = 2xy - 2x_0y_0.$$

Segue que a parte real do quociente é

$$\frac{(u(x,y)-u(x_0,y_0))(x-x_0) + (v(x,y)-v(x_0,y_0))(y-y_0)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} =$$

$$= \frac{(x^2-y^2-x_0^2+y_0^2)(x-x_0) + 2(xy-x_0y_0)(y-y_0)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

$$= \frac{(x-x_0)^2(x+x_0) + (y-y_0)((y+y_0)(x_0-x) + 2(xy-x_0y_0))}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

$$= \frac{(x-x_0)^2(x+x_0) + (y-y_0)(xy-x_0y_0+yx_0-y_0x)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

$$= \frac{(x-x_0)^2(x+x_0) + (y-y_0)^2(x+x_0)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} = x + x_0.$$

Para a parte imaginária, temos

$$\frac{(u(x,y)-u(x_0,y_0))(y_0-y) + (v(x,y)-v(x_0,y_0))(x-x_0)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

$$= \frac{(x^2-y^2-x_0^2+y_0^2)(y_0-y) + (2xy-2x_0y_0)(x-x_0)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

$$= \frac{(y_0-y)^2(y_0+y) + (y_0-y)(x^2-x_0^2) + (2xy-2x_0y_0)(x-x_0)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

$$= \frac{(y_0-y)^2(y_0+y) + (x-x_0)^2(y+y_0)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} = y + y_0.$$

Concluímos

$$f'(z_0) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (x+x_0) + i\left(\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (y+y_0)\right) = 2(x_0+iy_0).$$

Exemplo

A função conjugado $h(z) = \overline{z}$ não tem derivada: temos $u(x, y) = x$ e $v(x, y) = -y$. Substituindo na definição, vem

$$\begin{aligned}\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \frac{(x - x_0)(x - x_0) + (-y + y_0)(y - y_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + \\ &\quad + i\frac{(x - x_0)(y_0 - y) + (-y + y_0)(x - x_0)}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \\ &= \frac{(x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + 0i.\end{aligned}$$

Como não existe o limite

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{(x - x_0)^2 - (y - y_0)^2}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2 - k^2}{h^2 + k^2},$$

não existe derivada da função conjugado (verifique que o limite não existe usando os caminhos $h = k$ e $h = 2k$).

Exemplo

Como esperado,

$$(z)' = 1, \qquad (c)' = 0.$$

Tome $f(z) = z$ e $g(z) = c$ constante complexa. Temos

$$\frac{f(z) - f(w)}{z - w} = \frac{z - w}{z - w} = 1,$$

logo

$$f'(w) = \lim_{z\to w} \frac{z - w}{z - w} = \lim_{z\to w} 1 = 1.$$

Por fim, para a função constante g, temos

$$\frac{g(z) - g(w)}{z - w} = \frac{c - c}{z - w} = 0,$$

e segue que $g'(w) = 0$.

Proposição

Regras para calcular derivadas

Sejam $f : U \to \mathbb{C}$, $g : V \to \mathbb{C}$.

Se $z \in U \cap V$ e existem $f'(z)$ e $g'(z)$, então

- $f + g$ é derivável em z e
$$(f+g)'(z) = f'(z) + g'(z).$$
- fg é derivável em z e
$$(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z).$$
- se $g(z) \neq 0$, então $1/g$ é derivável em z e
$$(1/g)'(z) = -\frac{g'(z)}{g(z)^2}.$$
- se $g(z) \neq 0$, então f/g é derivável em z e
$$(f/g)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g(z)^2}.$$

Se a imagem de g está contida em U, g é derivável em z e f é derivável em $g(z)$, então $f \circ g$ é derivável em z e

$$(f \circ g)'(z) = f'(g(z))\, g'(z).$$

Exemplo

Ainda temos

$$(z^n)' = nz^{n-1}$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$ e para $z \neq 0$ se $n < 0$.

De fato, os casos $n = 0$ e $n = 1$ foram verificados há pouco. Para $n = 2$, usamos a regra do produto

$$(z^2)' = (z\,z)' = (z')z + z(z') = z + z = 2z.$$

Indutivamente demonstramos a validade para todas as potências positivas.

Por fim para n negativo, a regra do quociente dá

$$(z^n)' = (1/z^{-n})' = -\frac{(z^{-n})'}{(z^{-n})^2} = nz^{n-1}.$$

Uma função derivável em um ponto é contínua nesse ponto.

Essa propriedade dá um critério para filtrar os pontos onde a função é derivável: não existe derivada em pontos de descontinuidade.

4.1 Funções analíticas

Definição

Uma função $f : U \to \mathbb{C}$ é analítica em $z_0 \in U$ quando ela é derivável todos os pontos de uma vizinhança de z_0.

Dizemos que f é analítica em $A \subset U$ quando f é analítica em cada ponto de A.

Lembre que uma vizinhança de z_0 contém um disco de raio $r > 0$, por menor que seja. Uma função é analítica em um ponto quando ela tem derivada em todos os pontos de um disco que centrado nesse ponto.

Funções analíticas também são chamadas de funções holomorfas.

Exemplo

A função $f(z) = |z|^2$ não é analítica em nenhum ponto.

Vamos primeiro procurar pontos onde a função é derivável. Escrevendo $f(z) = z\overline{z}$, temos

$$\frac{f(z) - f(w)}{z - w} = \frac{z\overline{z} - w\overline{w}}{z - w} = \frac{z\overline{z} - w\overline{z}}{z - w} + \frac{w\overline{z} - w\overline{w}}{z - w} = \overline{z} + w\frac{\overline{z} - \overline{w}}{z - w}.$$

Logo

$$\lim_{z \to w} \frac{f(z) - f(w)}{z - w} = \lim_{z \to w} \left(\overline{z} + w\frac{\overline{z} - \overline{w}}{z - w} \right),$$

e esse limite só existe se $w = 0$. Nesse ponto, temos $f'(0) = 0$.

Concluímos que f é derivável apenas em um ponto, assim não é analítica em nenhum ponto.

Definição

Uma função é inteira quando é analítica em $\mathbb{C}$.

Exemplo

Pelo que vimos acima, polinômios possuem derivada em todos os pontos do plano. Dessa forma, polinômios são funções inteiras.

Exemplo

Funções racionais $p(z)/q(z)$ são deriváveis em todos os pontos onde $q(z) \neq 0$. Dessa forma, elas são funções analíticas em todo o seu domínio, mas não são funções inteiras (desde que q não seja constante).

4.2 Visualizando a derivada

A derivada de uma função real está relacionada à taxa de crescimento da função. Uma função com derivada não-nula em um ponto é crescente ou decrescente de acordo com o sinal da derivada. A derivada determina a inclinação da tangente ao gráfico da função nesse ponto.

Vamos ver a ligação entre a derivada complexa e o mapa de cores da função.

Quando uma função f é derivável em um ponto z_0 e $f'(z_0) \neq 0$, temos a aproximação linear

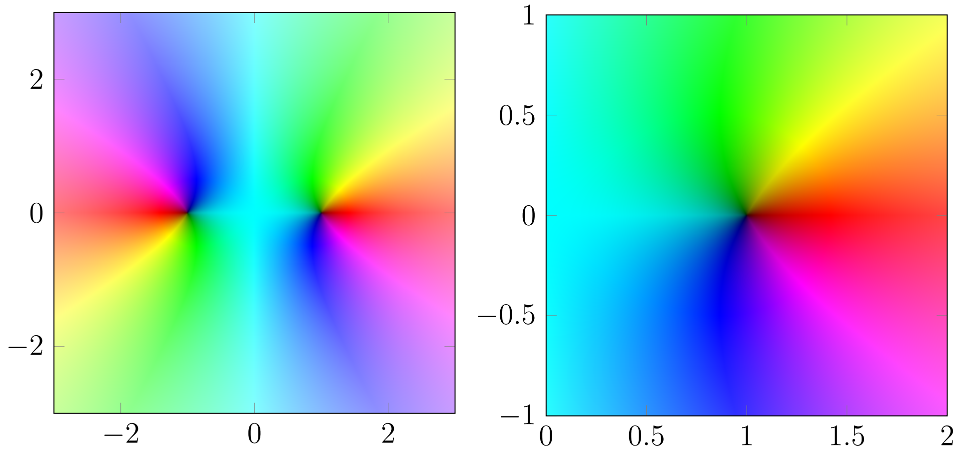
$$f(z) - f(z_0) = f'(z_0)(z - z_0) + h(z - z_0),$$

onde o termo h tende a zero no limite quando $z \to z_0$.

Assim em uma vizinhança (possivelmente pequena) do ponto z_0, o gráfico de $f(z) - f(z_0)$ é similar ao gráfico da função $g(z) = f'(z)(z - z_0)$. Veja os exemplos a seguir.

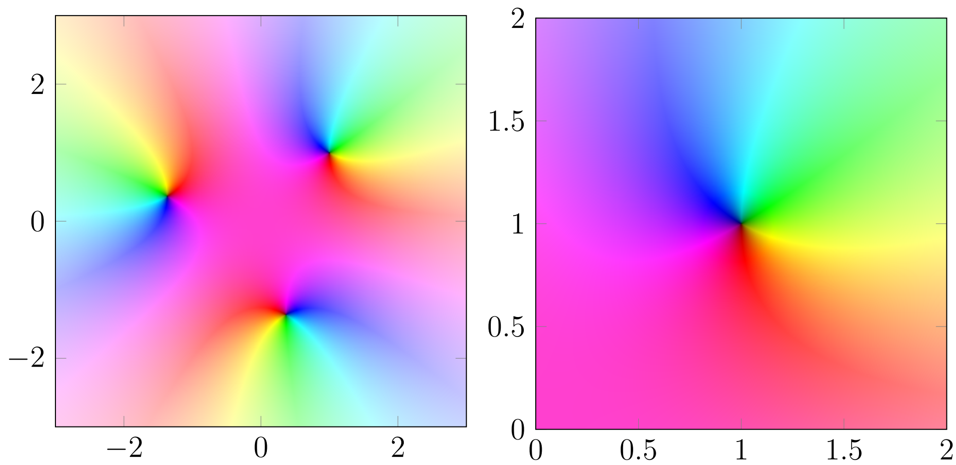
Exemplo

Considere $f(z) = z^2$ próximo de $z = 1$. Temos $f'(z) = 2z$, logo $f'(1) = 2$ e $f(z) - 1$ é aproximado por $2(z-1)$:



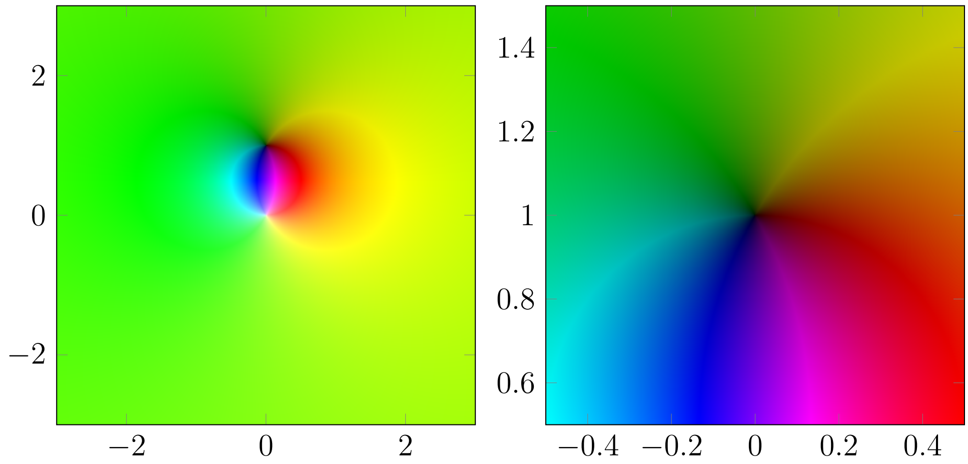
Exemplo

Considere $f(z) = z^3$ próximo de $z = 1 + i$. Temos $f'(z) = 3z^2$, logo $f'(1+i) = 6i$:



Exemplo

Considere $f(z) = 1/z$ próximo de $z = i$. Temos $f'(z) = -1/z^2$, logo $f'(i) = -1/-1 = 1$: próximo ao ponto $z = i$ a função f é aproximada pela identidade.



Se localmente (isso é, em uma pequena vizinhança do ponto) o gráfico de $f(z)-f(z_0)$ não se parece com uma função linear, então a derivada não existe ou é nula em z_0. Dois exemplos são a função z^2 (na vizinhança da origem cada cor aparece duas vees) e a função $\sqrt{z}$ (falta uma parte do plano em uma vizinhança da origem).

4.3 Condições de Cauchy-Riemann

Enquanto a função f tem derivada complexa (que é um número complexo), as funções u e v são funções reais de duas variáveis reais - portanto, elas tem derivadas parciais (e gradiente, etc.).
A relação entre as derivadas parciais de u, v e a derivada complexa de f é o tema dessa seção.

Teorema

Equações de Cauchy-Riemann

Sejam $f : U \to \mathbb{C}$ e $A \subset U$.

Se f tem derivada em $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$, então valem as Equações de Cauchy-Riemann (ECR)

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0), \qquad u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0).$$

Reciprocamente, se as funções u, v tem derivadas parciais de primeira ordem contínuas em A e valem as ECR em todo A, então $f = u + iv$ tem derivada (complexa) em todo ponto interior de A e

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0).$$

As equações são chamadas Equações de Cauchy-Riemann e fornecem o meio mais prático de verificar se uma função complexa tem derivada (e calculá-la).

Exemplo

$$(z^2)' = 2z,$$

de novo. Considere $f(z) = z^2$, temos a forma binomial $u(x, y) = x^2 - y^2$, $v(x, y) = 2xy$. Calculando as derivadas, temos

$$\begin{aligned} u_x &= 2x, & v_x &= 2y, \\ u_y &= -2y, & v_y &= 2x, \end{aligned}$$

verificamos por inspeção que as ECR se verificam em todo ponto.

Segue que a derivada de f é

$$f'(z) = u_x + iv_x = 2x + i2y = 2z.$$

Exemplo

Seja $f(z) = (a+ib)x + (c+id)y$ uma função linear de x e y. Quais as condições para ter f analítica?

Expandindo a expressão de f obtemos $u = ax + cy$, $v = bx + dy$ e calculamos as derivadas parciais:

$$u_x = a, \quad v_x = b,$$
$$u_y = c, \quad v_y = d.$$

Para ter f analítica, precisamos que sejam satisfeitas ECR, isto é,

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$

No nosso caso, temos a condição

$$a = d, \quad b = -c,$$

que permite exprimir f como

$$f(z) = (a+ib)x + (-b+ia)y = (a+ib)x + (i^2 b + ia)y = (a+ib)(x+iy).$$

Portanto, toda função analítica formada por u e v polinômios de grau um é da forma $f(z) = \lambda z$.

Podemos concluir do exemplo que $Re(z)$ e $Im(z)$ não são funções analíticas (elas correspondem a $a = 1$, $b = c = d = 0$ e $c = 1$, $a = b = d = 0$ respectivamente).
Naturalmente, podemos concluir o mesmo aplicando diretamente as ECR.

Exemplo

A função $f(z) = \cos x + i \sin y$ é analítica?

Temos as derivadas parciais

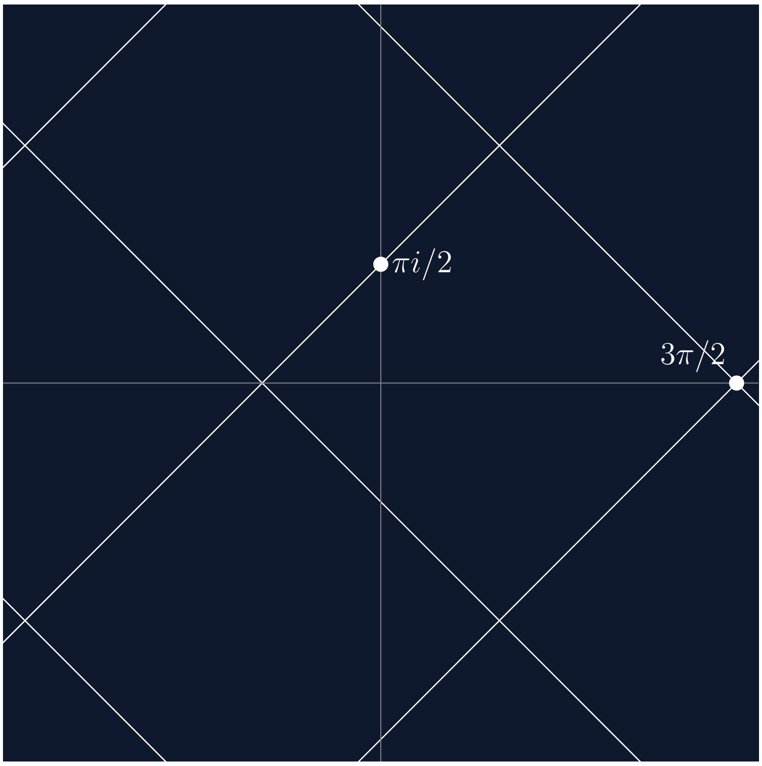
$$\begin{aligned} u_x &= -\sin x, \quad & v_x &= 0, \\ u_y &= 0, & v_y &= \cos y. \end{aligned}$$

Como funções trigonométricas tem derivadas contínuas, vamos verificar ECR:

$$-\sin x = \cos y, \qquad 0 = 0.$$

A equação é satisfeita nas retas $y = x - 3\pi/2 + 2n\pi$ e $y = -x + \pi/2 + 2n\pi$, para $n \in \mathbb{Z}$ - ao longo dessas retas a função é derivável.

Contudo, como esse conjunto não tem nenhum ponto interior, a função não é analítica em nenhum ponto.



Prof. Vanderley Ferreira - 2021

Exemplo

Quando a função

$$f(z) = (a+bi)x^2 + (c+di)xy + (r+si)y^2$$

é analítica?

Reescrevendo f na forma binomial temos $u(x,y) = ax^2 + cxy + ry^2$, $v(x,y) = bx^2 + dxy + sy^2$. Calculando as derivadas parciais:

$$u_x = 2ax + cy, \quad v_x = 2bx + dy,$$
$$u_y = cx + 2ry, \quad v_y = dx + 2sy.$$

Como polinômios tem derivadas parciais contínuas, precisamos apenas verificar quando são satisfeitas as ECR. Pedindo que $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$, temos

$$2ax + cy = dx + 2sy \qquad cx + 2ry = -2bx - dy.$$

Comparando os coeficientes de x e de y em cada equação, temos

$$d = 2a \quad s = c/2 \quad c = -2b \quad r = -d/2$$

Concluímos que

$$f(z) = (a+bi)x^2 + (-2b+2ai)xy + (-a-bi)y^2 =$$

$$(a+bi)(x^2-y^2) + 2(ai+bi^2)xy = (a+bi)z^2.$$

Assim toda função analítica formada por u e v polinômios de grau 2 é da forma $f(z) = \lambda z^2$.

Os exemplos acima apontam para o fato que não é tão comum uma função ser analítica. Mesmo que u e v sejam funções polinomiais (as funções mais regulares que existem), a função $u + iv$ só será analítica quando uma condição extra (ECR) for satisfeita.

Se escrevermos a função f nas variáveis polares (isto é, escrever z na forma polar $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi))$, as funções u e v também podem ser escritas nas variáveis r e φ:

$$f(r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = u(r,\varphi) + iv(r,\varphi).$$

Exemplo

Temos para $f(z) = z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ as partes real e imaginária

$$u(r,\varphi) = r^n\cos n\varphi, \qquad v(r,\varphi) = r^n\sin n\varphi.$$

Temos uma versão das ECR para funções em variáveis polares:

$$u_r = \frac{v_\varphi}{r}, \qquad v_r = -\frac{u_\varphi}{r}.$$

Quando as derivadas parciais são contínuas e satisfazem a forma polar das ECR, a derivada de f é dada por

$$f'(z) = (u_r + iv_r)(\cos\varphi - i\sin\varphi),$$

ou em derivadas angulares

$$f'(z) = \frac{1}{r}(v_\varphi - iu_\varphi)(\cos\varphi - i\sin\varphi).$$

Prof. Vanderley Ferreira - 2021

Exemplo

Definimos o valor principal da raiz n-ésima como

$$\sqrt[n]{z} = |z|^{1/n}\left(\cos\frac{Arg(z)}{n} + i\sin\frac{Arg(z)}{n}\right),$$

para $z \neq 0$. Em variáveis polares, temos a parte real e imaginária

$$u(r,\varphi) = r^{1/n}\cos\frac{\varphi}{n}, \qquad v(r,\varphi) = r^{1/n}\sin\frac{\varphi}{n}.$$

Calculando as derivadas parciais, obtemos

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{1}{n}r^{-1+1/n}\cos\frac{\varphi}{n}, & v_r &= \frac{1}{n}r^{-1+1/n}\sin\frac{\varphi}{n}, \\ u_\varphi &= -\frac{1}{n}r^{1/n}\sin\frac{\varphi}{n}, & v_\varphi &= \frac{1}{n}r^{1/n}\cos\frac{\varphi}{n}. \end{aligned}$$

Verificamos por inspeção que vale ECR na forma polar e que as derivadas parciais são contínuas para $r \neq 0$. Portanto $\sqrt[n]{\ }$ é analítica em

$$\{z = x + iy; \quad x \neq 0 \text{ ou } y \notin (-\infty, 0]\} = \{-\pi < Arg(z) < \pi\}.$$

Nesse aberto, a derivada é dada por

$$(\sqrt[n]{z})' = (u_r + iv_r)(\cos\varphi - i\sin\varphi) = (\frac{1}{n}r^{-1+1/n}\cos\frac{\varphi}{n} + i\frac{1}{n}r^{-1+1/n}\sin\frac{\varphi}{n})(\cos\varphi - i\sin\varphi),$$

enfim,

$$(\sqrt[n]{z})' = \frac{1}{n}r^{1/n}(\cos\frac{\varphi}{n} + i\frac{1}{n}\sin\frac{\varphi}{n})r^{-1}(\cos\varphi - i\sin\varphi) = \frac{1}{n}\frac{\sqrt[n]{z}}{z}.$$

Mas professor...

Não demos muita volta só para concluir que vale a regra da derivada de z^p para p racional?

Sim, um pouco. Mas com as ferramentas atuais é o único caminho. Mais para frente vamos usar *log* para definir as potências e chegar um pouco mais rápido na derivada da raiz.

Atenção: não é verdade que sempre que valem ECR em um ponto, f é derivável nesse ponto.

Exemplo

A função

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^5}{|z|^4}, & z \neq 0, \\ 0, & z = 0, \end{cases}$$

cumpre ECR em $z = 0$, no entanto não é derivável em nenhum ponto.

Vamos começar verificando ECR. Para $z \neq 0$, temos

$$u(x,y) = \frac{x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4}{(x^2+y^2)^2}, \quad v(x,y) = \frac{5x^4y - 10x^2y^3 + y^5}{(x^2+y^2)^2}.$$

Como $u(0,0) = v(0,0) = 0$, temos uma função definida por casos e só podemos calcular as derivadas parciais em $(0,0)$ usando a definição: para u, temos

$$u_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{u(x,0) - u(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^5}{(x^2)^2 x} = 1,$$

$$u_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{u(0,y) - u(0,0)}{y} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{(y^2)^2 y} = 0.$$

Já para v, temos

$$v_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{v(x,0) - v(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{(x^2)^2 x} = 0,$$

$$v_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{v(0,y) - v(0,0)}{y} = \lim_{x\to 0} \frac{y^5}{(y^2)^2 y} = 1.$$

Verificamos portanto que

$$u_x(0,0) = v_y(0,0) = 1, \qquad u_y(0,0) = -v_x(0,0) = 0.$$

Para concluir, vamos mostrar que f não tem derivada em $z = 0$. Temos

$$\frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \frac{\frac{z^5}{|z|^4} - 0}{z} = \frac{z^5}{z|z|^4} = \left(\frac{z}{|z|}\right)^4.$$

Como $z/|z|$ não tem limite em $z = 0$, também não existe limite de $(z/|z|)^4$ (você também pode argumentar por caminhos: use $y = 0$ e $y = x$, por exemplo).

4.4 Funções harmônicas

Uma função harmônica é uma solução da equação de Laplace

$$\Delta u = 0,$$

aqui Δ é o operador de Laplace, que em duas dimensões tem a forma

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial_y^2}\,.$$

O estudo das funções harmônicas é um assunto vasto. Aqui estudaremos a relação entre funções harmônicas e funções analíticas (isso é, funções complexas que tem derivada em um aberto).

Quando f é analítica em U, as partes real e imaginária são harmônicas em U.

Definição

Uma função $u : U \to \mathbb{R}$ com derivadas parciais contínuas até a segunda ordem em U é harmônica quando

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

em todo ponto de U.

Teorema

Se f é analítica em U, e

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

então as partes u e v são harmônicas em U.

Usamos aqui as equações de Cauchy-Riemann: suponha que u e v tem derivadas de segunda ordem contínuas em U, então derivando as ECR mais uma vez obtemos

$$u_x = v_y \quad \Longrightarrow \quad u_{xx} = v_{yx}, \qquad u_{xy} = v_{yy},$$

$$u_y = -v_x \quad \Longrightarrow \quad u_{yx} = -v_{xx}, \qquad u_{yy} = -v_{xy}.$$

Somando os pares de equações relevantes, temos

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy}, \quad v_{xx} + v_{yy} = -u_{yx} + u_{xy}.$$

Como as derivadas são contínuas, as derivadas mistas são iguais, e concluímos que u e v são harmônicas.

Mas professor...

Aqui assumimos que u e v tem uma derivada extra - essa hipótese não precisa ir no teorema?

Bem observado - estamos usando aqui um resultado muito forte que torna as funções analíticas únicas: quando uma função é analítica (isto é, ela tem uma derivada), ela tem derivadas de todas as ordens. Como f'' existe, as derivadas parciais de u e v podem ser calculadas a partir dela.

Dizemos que as funções u e v são funções harmônicas conjugadas (não confundir com conjugado de z). Isto é, um par de funções harmônicas é conjugado quando $u + iv$ é uma função complexa analítica.

Vejamos como encontrar a função v conjugada quando conhecemos u.

Exemplo

Considere $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$, encontre a sua harmônica conjugada. Escreva a função analítica f produzida a partir de u.

Verifique que $u_{xx} = 6x$ e $u_{yy} = -6x$, de modo que u é mesmo harmônica no plano. Para ter u e v conjugadas, $f = u + iv$ deve ser analítica, satisfazendo ECR:

$$u_x = 3x^2 - 3y^2 = v_y, \qquad u_y = -6xy = -v_x.$$

Aqui vamos integrar a equação diferencial da esquerda no intervalo $0 < y < y_0$, para obter

$$\int_0^{y_0} v_y(x,y)dy = \int_0^{y_0} 3x^2 - 3y^2 dy,$$
$$v(x,y_0) - v(x,0) = 3x^2y_0 - y_0^3 \implies v(x,y_0) = 3x^2y_0 - y_0^3 + C(x),$$

onde a constante precisa ser determinada usando a outra equação diferencial:

$$v_x = 6xy \implies (3x^2y - y^3 + C(x))_x = 6xy,$$

que nos dá

$$6xy + C'(x) = 6xy \implies C'(x) = 0,$$

e C é uma constante real. Concluímos que

$$v(x,y) = 3x^2y - y^3 + C$$

é a conjugada harmônica de u.

Finalmente,

$$f(z) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3 + C) = z^3 + iC, \quad C \in \mathbb{R}'.$$

Uma importante consequência das equações de Cauchy-Riemann é envolve o gradiente: lembre que o gradiente é o vetor das derivadas parciais $\nabla u = (u_x, u_y)$. Calculando o produto interno entre ∇u e ∇v em um dado ponto e substituindo as ECR, temos

$$\nabla u \cdot \nabla v = u_x v_x + u_y v_y = v_y v_x + -v_x v_y = 0.$$

Isso nos diz que ∇u e ∇v são ortogonais em todo ponto de U.

As curvas de nível de u e de v são duas a duas ortogonais.

Lembrando: a curva de nível c da função $u : U \to \mathbb{R}$ é o conjunto

$$\{(x, y) \in U, \quad u(x, y) = c\}.$$

O conjunto na definição acima pode ser vazio ou formado por um conjunto finito de pontos, mas no caso geral quando u tem derivadas comportadas o conjunto é de fato uma curva.

Uma das propriedades mais importantes do gradiente é que ele marca a direção de máximo crescimento de u. Uma consequência é que nos pontos onde $\nabla u \neq (0, 0)$ o gradiente é ortogonal à curva de nível de u naquele ponto.

Como os gradientes de u e de v são ortogonais, quando ambos são não-nulos cada um é tangente à curva de nível do outro.

Exemplo

Considere a função $f(z) = z^2$, temos

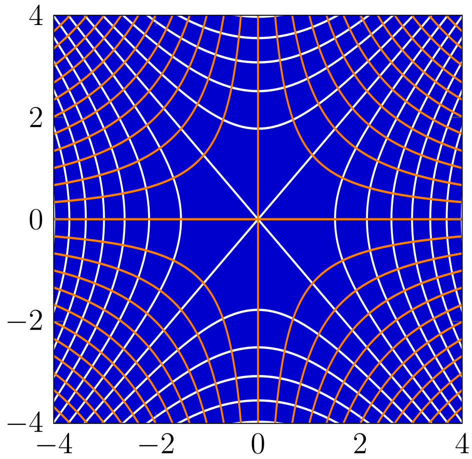
$$u(x, y) = x^2 - y^2, \quad \nabla u = (2x, -2y),$$

e

$$v(x, y) = 2xy, \quad \nabla v = (2y, 2x).$$

Como esperado, ∇u e ∇v são ortogonais. A figura ilustra a interseção das curvas de nível.

Observe que em $z = 0$ as curvas não se intersectam ortogonalmente. Por que isso não é uma contradição?


4
2
0
−2
−4
−4
−2
0
2
4