Funções de Variável Complexa

Mat46 2021 – Semana 2

Sumário

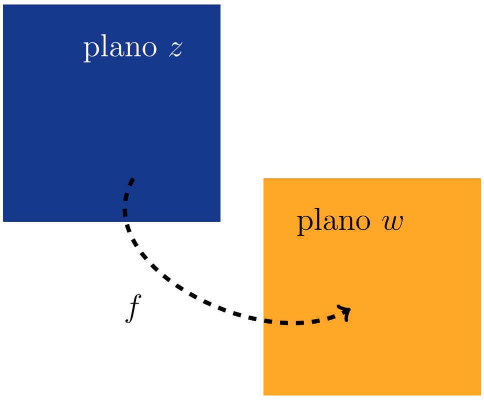
3 Funções complexas

Definição

Uma função complexa é uma correspondência

$$f : U \to \mathbb{C}$$

onde U é subconjunto de $\mathbb{C}$ e cada $z \in U$ é associado a um único $w = f(z)$.



Exemplo

Vimos algumas funções básicas na semana passada:

$$Re(z) = x, \quad Im(z) = y,$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \overline{z} = x - yi.$$

A função conjugado é diferente das demais: sua imagem é um número complexo, enquanto Re, Im, $|\cdot|$ são sempre números reais.

Definição

Chamamos o conjunto U que aparece na definição o domínio da função f.

Quando o domínio de uma função não é dado, entende-se que é o maior conjunto possível onde a função está definida.

Exemplo

Todas as funções do exemplo anterior tem como domínio $U = \mathbb{C}$.

Exemplo

O argumento principal Arg é uma função com domínio $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, a imagem dessa função é sempre um número real no intervalo $(-\pi, \pi]$.

Exemplo

Podemos usar o conjugado e a função identidade $f(z) = z$ para expressar as outras:

$$Re(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}, \qquad Im(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}, \qquad |z| = \sqrt{z\overline{z}}.$$

Finalmente, para $z \neq 0$, temos

$$Arg(z) = \begin{cases} \arccos\left(\frac{z+\overline{z}}{2\sqrt{z\,\overline{z}}}\right), & Im(z) \geq 0, \\ -\arccos\left(\frac{z+\overline{z}}{2\sqrt{z\,\overline{z}}}\right), & Im(z) < 0. \end{cases}$$

Definição

Escreva a função f na forma algébrica. A parte real e a parte imaginária de f são as funções reais a duas variáveis reais $u : U \to \mathbb{R}$ e $v : U \to \mathbb{R}$ definidas pela equação

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Observe que a parte real de f é $Re(f(z))$ e a parte imaginária de f é $Im(f(z))$. Será conveniente considerar o domínio U das partes real e imaginária como subconjunto de $\mathbb{R}^2$, e não de $\mathbb{C}$.

Exemplo

Para a função conjugado, temos

$$u(x, y) = x, \qquad v(x, y) = -y.$$

Para a função Im precisamos ter cuidado:

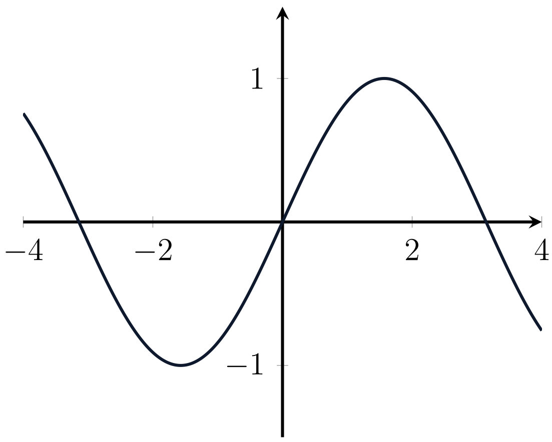
$$Im(x + iy) = y,$$

ou seja, sua parte real é y e a parte imaginária é zero:

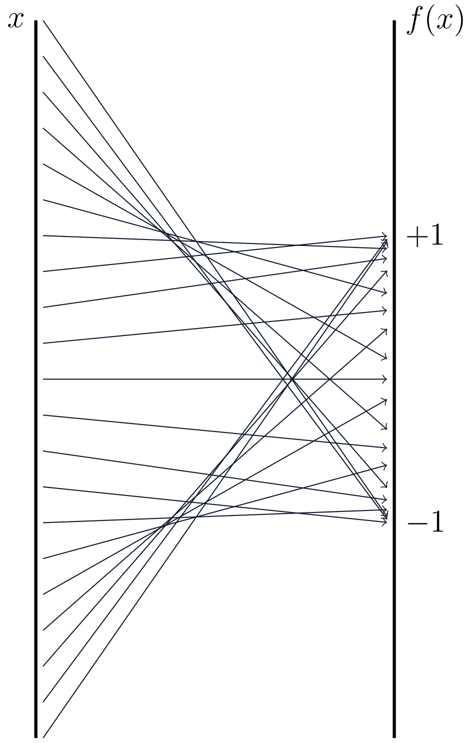
$$u(x, y) = y, \qquad v(x, y) = 0.$$

3.1 Visualizando uma função complexa

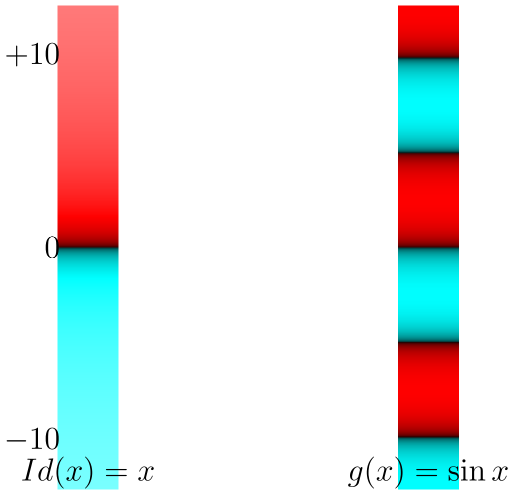
Precisamos ser criativos pra visualizar uma função complexa - não temos dimensões suficientes. Partiremos das funções reais, que são familiares: a função seno pode ser representada pelo gráfico usual.



Podemos pensar na função sin como fazendo a correspondência entre duas cópias dos números reais. Cada número da primeira reta é levado no número correspondente na outra reta:

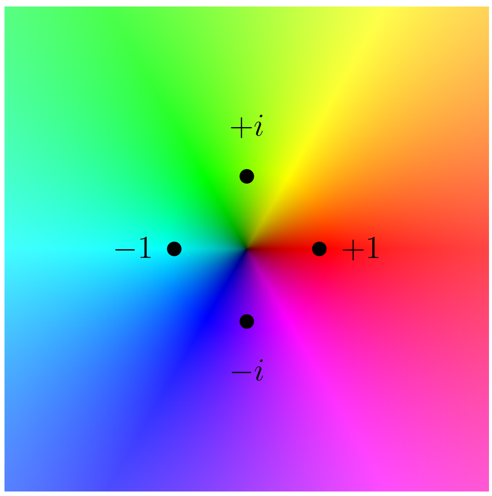


Por fim podemos usar apenas uma cópia da reta real se associarmos uma **cor** a cada ponto da reta: vamos associar a números positivos tons de vermelho e a números negativos tons de ciano, o valor absoluto do número definindo o brilho da cor.



Vamos adaptar a ideia do mapa de cores para visualizar nossas funções. Precisaremos de apenas uma cópia de $\mathbb{C}$, isto é, um plano.

Para isso precisamos associar uma cor a cada direção do plano, como fizemos com a reta:

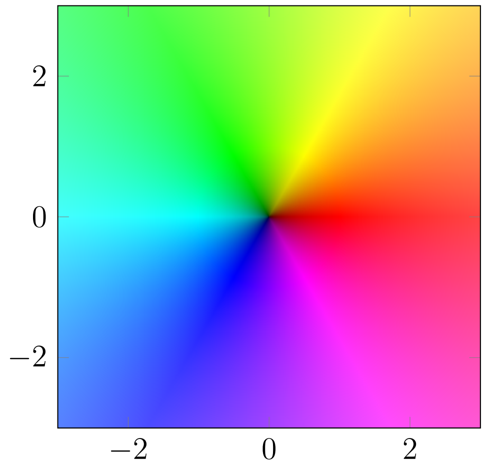


Exemplo

O mapa de cores da função identidade

$$f(z) = z$$

permite observar a cor associada a cada direção e o aumento do brilho a partir da origem em cada direção.

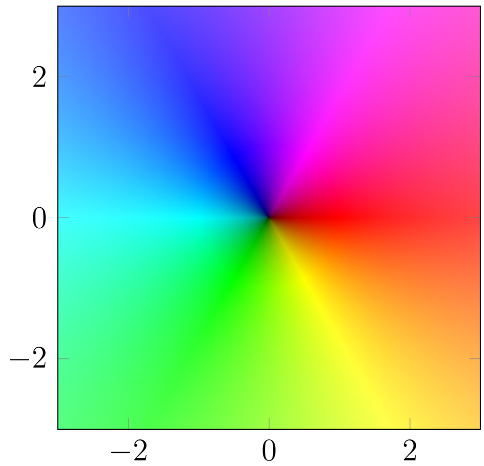


Exemplo

O gráfico do conjugado

$$f(z) = \overline{z}$$

permite observar a simetria em relação à identidade.

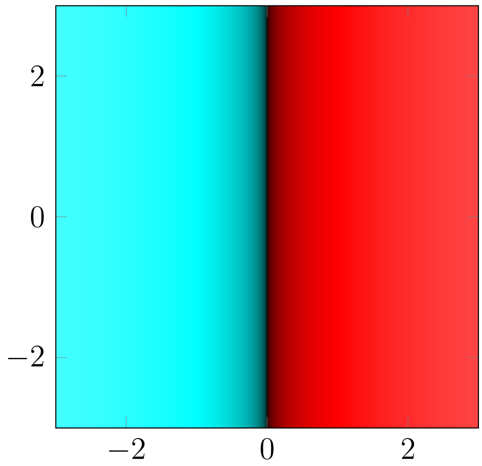


Exemplo

Como a função

$$f(z) = Re(z)$$

sempre assume valores reais, o gráfico é diferente dos primeiros: apresenta apenas tons de duas cores.

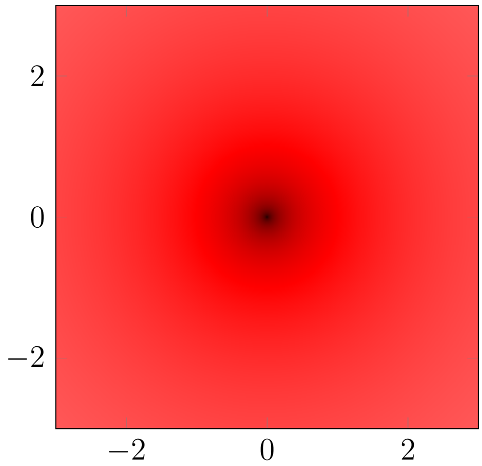


Exemplo

A função

$$f(z) = |z|$$

é sempre não-negativa, assim o gráfico apresenta tons de uma cor só, com brilho crescendo a partir da origem em todas as direções.

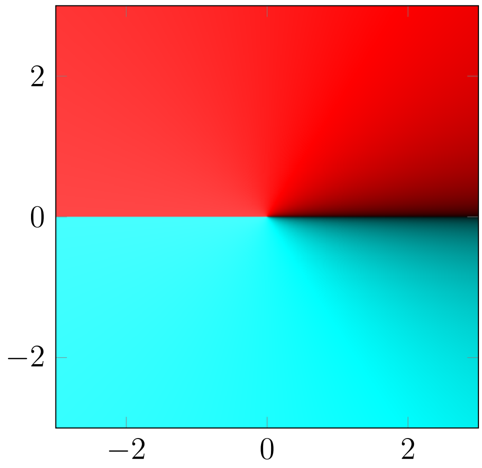


Exemplo

A função

$$f(z) = Arg(z)$$

é constante ao longo de semirretas a partir da origem, seus valores percorrem $(-\pi, \pi]$.



3.2 Funções lineares

Definição

Uma função linear é da forma $f(z) = a\,z$, para algum $a \in \mathbb{C}$ fixo.

Escrevendo $a = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, vemos que

$$f(z) = r\left((\cos\alpha + i\sin\alpha)z\right),$$

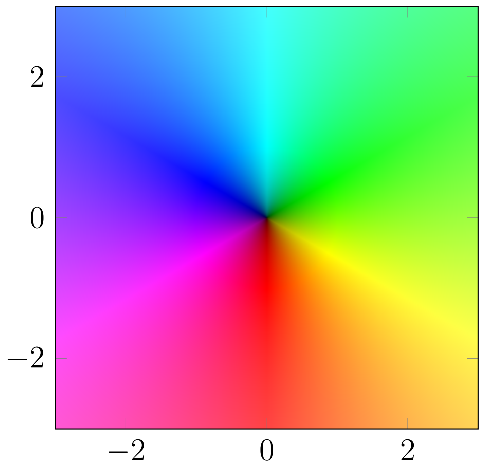
a função linear transforma cada ponto z por meio de uma rotação de ângulo α seguida de uma multiplicação pelo fator r.

Exemplo

Considere $f(z) = i\,z$. Na forma polar,

$$f(z) = (\cos \pi/2 + i \sin \pi/2)z$$

e temos uma rotação de um quadrante.



Mas professor...

A função $w = iz$ faz uma rotação de $\pi/4$ no sentido antihorário. Por que então a figura está rotacionada no sentido horário?

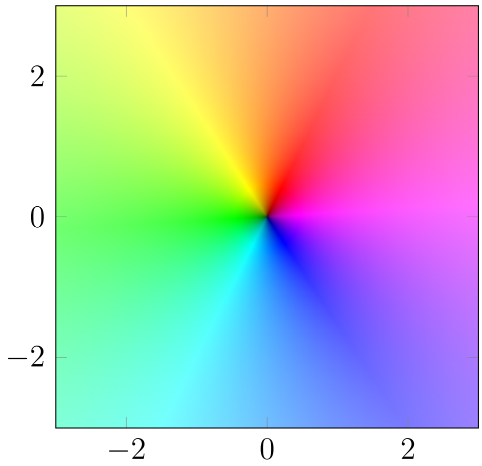
No mapa de cores, a posição de um ponto representa o valor onde a função é calculada, enquanto as cores representam o valor da função naquele ponto. Assim os pontso em vermelho representam onde $w = iz$ é um número real positivo - você pode verificar que isso corresponde a $z = -it$, para t real positivo - geometricamente, o eixo y negativo, como podemos verificar na imagem.

Exemplo

Considere $g(z) = (1 - 2i)z$, na forma polar temos

$$g(z) = \sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{5}}\right) z = \sqrt{5}|z|(\cos(Arg(z) - 1.107...) + i \sin(Arg(z) - 1.107...)).$$

A ação dessa função transforma cada ponto através de uma rotação de $1.107 rad$ no sentido horário seguida de uma multiplicação pelo fator $\sqrt{5}$.



Mas professor...

Uma função linear não é da forma $az + b$?

Podemos chamar esse tipo de função de "função polinomial de grau um".

Na verdade uma função é linear quando é compatível com a estrutura de produto vetorial considerada: $f(p + \lambda q) = f(p) + \lambda f(q)$. Essa igualdade só vale para uma função polinomial de grau um quando $b = 0$ (verifique).

3.3 Funções polinomiais e racionais

Definição

Uma função f é polinomial quando

$$f(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n,$$

onde a_0, ..., a_n são números complexos dados e $a_n \neq 0$.

O domínio de uma função polinomial é $\mathbb{C}$.

Exemplo

Considere a função $f(z) = z^2$ cujo mapa de cores é mostrado a seguir.

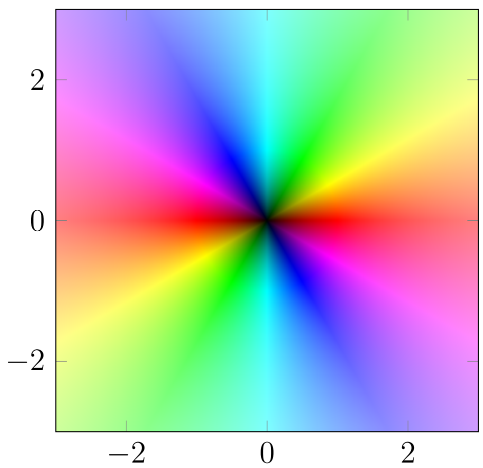
Temos $f(1) = f(-1) = 1$, ilustrado pelas duas regiões em vermelho próximas à origem. Temos ainda $f(i) = f(-i) = -1$, ilustrado pelas duas regiões em ciano próximas à origem.

A função f é sobrejetora e cobre o plano duas vezes: para cada w complexo, há dois números $z_1, \ z_2$ com $f(z_i) = w$.

Escrita na forma polar, temos

$$f(z) = (r\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 = r^2\cos 2\varphi + ir^2\sin 2\varphi,$$

o argumento da imagem é o dobro do argumento original. Assim a imagem do semiplano superior $\{z;\ Im(z) \geq 0\}$ é todo o plano.



Prof. Vanderley Ferreira - 2021

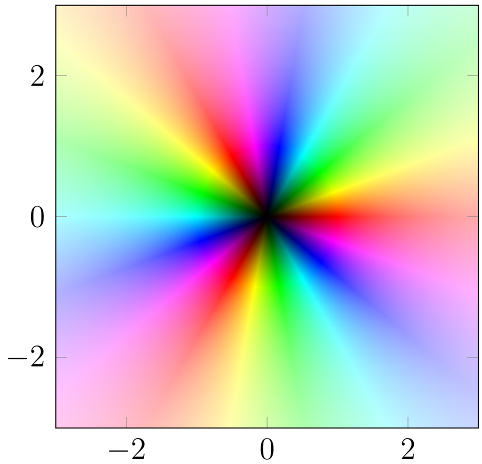
Exemplo

Considere a função $f(z) = z^3$. Escrevendo z na forma polar, vemos que

$$f(z) = (r\cos\varphi + ir\sin\varphi)^3 = r^3(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi),$$

cada ponto tem o seu argumento triplicado.

No gráfico esse comportamento é refletido pelas três cópias do plano (fazendo uma volta completa em volta de $z = 0$, passamos por todas as cores três vezes).



Definição

Uma função f é racional quando

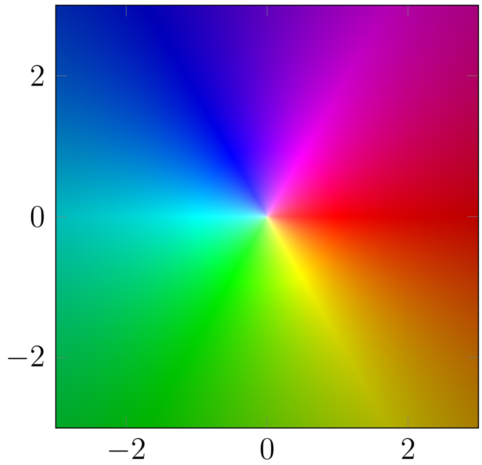
$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)},$$

onde $p(z)$ e $q(z)$ são funções polinomiais e q não é o polinômio nulo.

Uma função racional não está definida nos pontos onde $q(z)$ se anula - o domínio é $\mathbb{C}\backslash\{z \in \mathbb{C};\ q(z) = 0\}$.

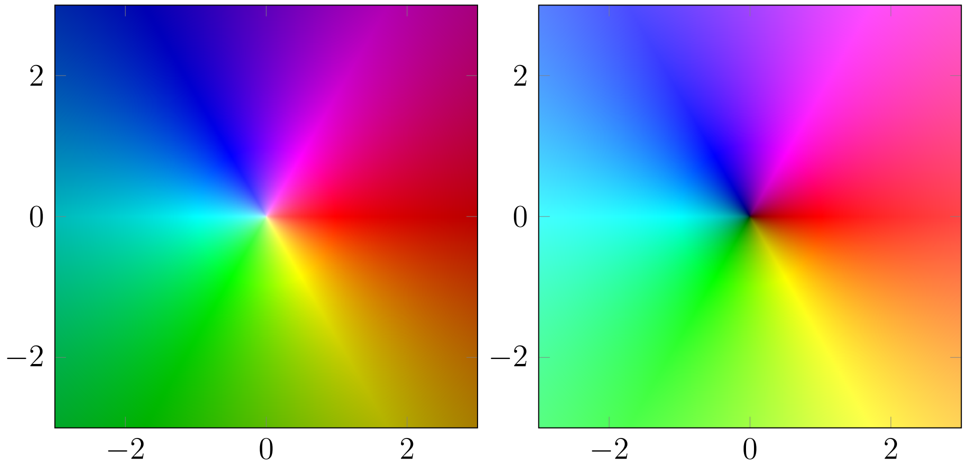
Exemplo

Considere a função $f(z) = 1/z$, o polinômio do denominador só se anula em $z = 0$, logo seu domínio é $\mathbb{C} \backslash \{0\}$.



Vamos passar **bastante** tempo com a função $1/z$.

É um bom ponto para contrastar os gráficos de $1/z$ e $\overline{z}$. Observe que a primeira é indefinida em 0, enquanto a segunda se anula. Ambas as funções produzem a mesma sequência de cores em torno de $z = 0$, oposta à da função identidade.



Prof. Vanderley Ferreira - 2021

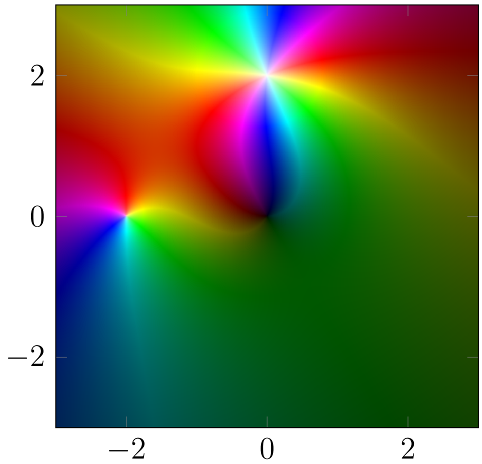
Exemplo

Considere a função racional

$$f(z) = \frac{z}{(z+2)(z-2i)^2},$$

ela é definida em todo $\mathbb{C}$, exceto nos pontos $z = 2i$ e $z = -2$. A função se anula em $z = 0$.

Comparando os pontos $z = 0$ e $z = -2$, observe que a sequência na qual as cores se repetem é invertida. Em um mapa de cores os pontos onde $f \to \infty$ e os zeros são caracterizados pelo encontro de todas as cores.



3.4 Curvas parametrizadas

Definição

Uma função complexa $\gamma : I \to \mathbb{C}$ cujo domínio é um intervalo de $\mathbb{R}$ é uma curva parametrizada no plano complexo.

O traço da curva γ é a sua imagem, isto é,

$$\gamma(I) = \{w; \quad w = \gamma(t), \quad \text{para algum } t \in I\}.$$

Uma curva parametrizada é, portanto, uma função com uma variável real e imagem complexa.

Escrevendo a parte real e imaginária da curva γ, temos

$$\gamma(t) = u(t) + iv(t),$$

onde as funções u e v são funções reais de uma variável real (que sabemos integrar, derivar etc.).

Exemplo

Uma reta passando pelos pontos z e w pode ser parametrizada pela curva

$$\gamma(t) = z + t(w - z), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Observe que $\gamma(0) = z$ e $\gamma(1) = w$. Assim a reta é percorrida no sentido de z para w.

Além disso, o segmento de reta ligando z e w é parametrizado pela mesma função restrita ao intervalo $[0, 1]$.

Finalmente, para $w \neq 0$ fixando $z = 0$, a semirreta com origem em 0 e passando por w é parametrizada por

$$\delta(t) = tw, \quad t > 0.$$

Exemplo

Um círculo de raio r e centro z_0 é parametrizado pela função

$$\psi(t) = z_0 + r(\cos t + i \sin t),$$

que percorre o círculo no sentido antihorário começando no ponto $\psi(0) = z_0 + r$.

As principais curvas que usaremos serão retas e círculos.

Exemplo

A imagem de uma curva por uma função γ por uma função complexa f é a nova curva, dada pela composição de funções

$$\delta(t) = f(\gamma(t)).$$

Para que ela esteja definida é preciso que a imagem de γ esteja contida no domínio de f: $\gamma(I) \subset U$.

Exemplo

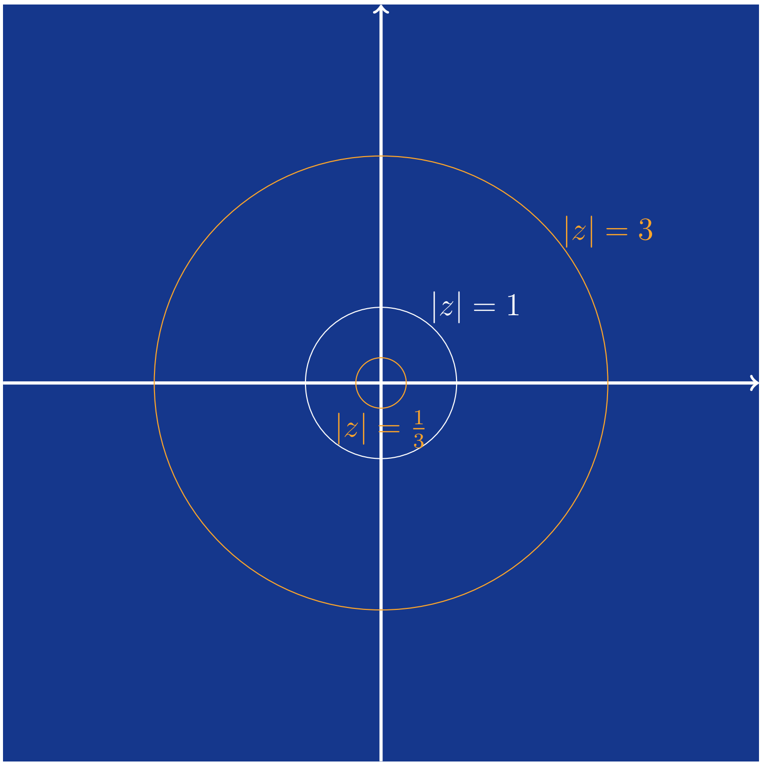
A imagem de um círculo de raio r centrado na origem pela função $f(z) = 1/z$ é um círculo de raio $1/r$.

De fato, tomando $\gamma(t) = r(\cos t + i \sin t)$, temos

$$\delta(t) = f(\gamma(t)) = (r(\cos t + i \sin t))^{-1} = r^{-1}(\cos t - i \sin t).$$

Segue que $|\delta(t)| = 1/r$.

Em particular, o círculo unitário é transformado nele mesmo.



Exemplo

A imagem de uma reta pela função $f(z) = 1/z$ é um círculo.

Considere a reta passando por $z = x + iy$ e $w = r + is$,

$$\gamma(t) = z + t(w - z) = x + t(r - x) + i(y + t(s - y).$$

Podemos fazer a composta $f(\gamma)$ desde que a reta não passe pela origem. Isso só acontece quando z e w são linearmente dependentes. Assumindo então que $xs - yr \neq 0$, defina

$$\delta(t) = f(\gamma(t)) = \frac{1}{\gamma(t)} = \frac{x + t(r - x) - i(y + t(s - y)}{(x + t(r - x))^2 + ((y + t(s - y))^2}.$$

Escolhendo z e w, sem alterar a reta, de modo que z é o ponto mais próximo da origem (e portanto $w - z$ é ortogonal a z), temos $w - z = -y + ix$ e

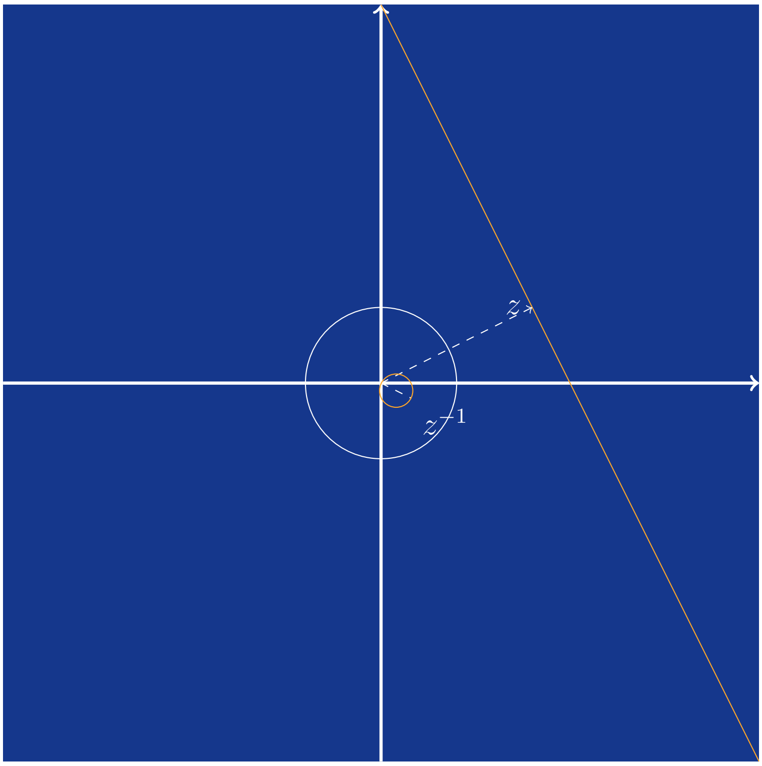
$$\delta(t) = \frac{x - ty - i(y + tx)}{(x^2 + y^2)(1 + t^2)}.$$

O centro da imagem é o ponto $c = 1/2z = (x - iy)/2(x^2 + y^2)$. Podemos verificar que

$$\begin{aligned} |\delta(t) - c| &= \left| \frac{x - ty - i(y + tx)}{(x^2 + y^2)(1 + t^2)} - \frac{1}{2z} \right| = \frac{1}{x^2 + y^2} \left| \frac{x - ty - i(y + tx)}{1 + t^2} - \frac{x - iy}{2} \right| \\ &= \frac{|x - 2ty - tx^2 + i(y + 2tx - yt^2)|}{(2(x^2 + y^2))(1 + t^2)} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{aligned}$$

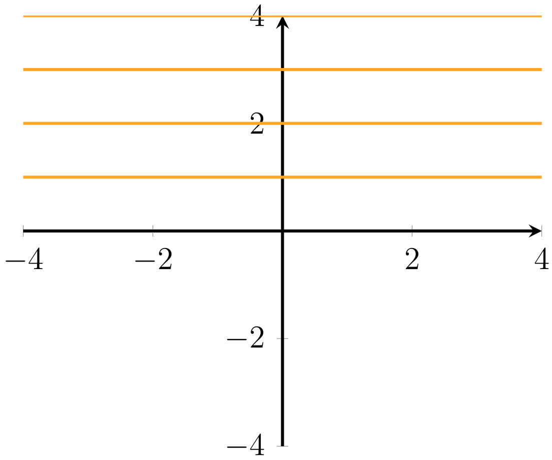
Portanto, o círculo tem raio $1/2|z|$ e passa pelos pontos $1/z$ quando $t = 0$ e 0 quando $t \to \infty$.

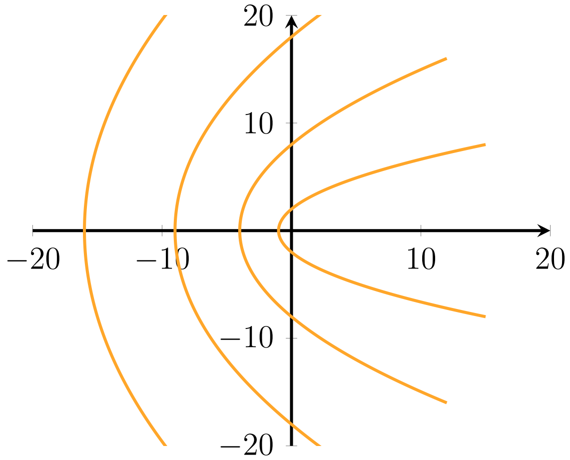
Prof. Vanderley Ferreira - 2021



Exemplo

A imagem da reta $y = k$ pela função z^2: considere $\gamma(t) = t + ki$, temos então (verifique) $\gamma(t)^2 = t^2 - k^2 + 2kti$. O traço da curva é formado pelos pontos da forma $(t^2 - k^2, 2kt)$, que descrevem para $k \neq 0$ a parábola $(x + k^2)4k^2 = y^2$:





3.5 Funções multivaloradas

Uma função multivalorada F associa a cada ponto do seu domínio $U \subset \mathbb{C}$ um subconjunto de $\mathbb{C}$.

Cada ponto do conjunto $F(z)$ é um dos valores de F em z.

O primeiro exemplo de função multivalorada que encontramos foi o argumento:

$$arg(z) = \{Arg(z) + 2k\pi; \quad k \in \mathbb{Z}\}.$$

De certa forma os outros exemplos derivam desse.

Exemplo

Outra função multivalorada que encontramos foram as potências $z^{1/n}$. Lembre que $0^{1/n} = \{0\}$ e

$$z^{1/n} = \left\{ r^{1/n} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right);\ k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1 \right\},$$

quando $z \neq 0$ temos exatamente n valores distintos.

Para produzir o gráfico de uma função multivalorada precisamos escolher de alguma forma apenas um valor para considerar em cada ponto. Exemplos incluem o argumento principal e a raiz principal.

Outra abordagem é a superfície de Riemann, que discutiremos mais tarde.

Exemplo

A raiz principal é uma função definida em todo $\mathbb{C}$. Para $n = 2$, a raiz quadrada principal é

$$\sqrt{z} = \begin{cases} \sqrt{|z|}(\cos(Arg(z)/2) + i\sin(Arg(z)/2), & z \neq 0, \\ 0, & z = 0. \end{cases}$$

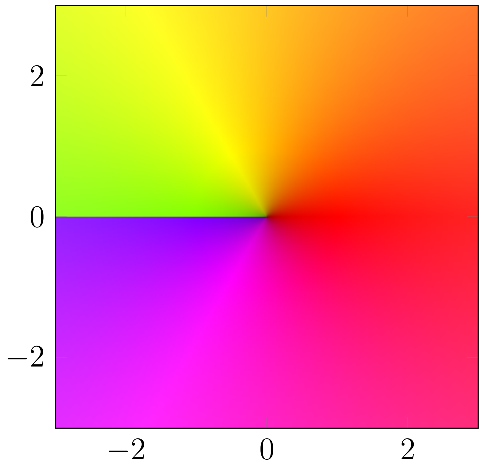
Podemos usar as fórmulas para seno e cosseno de meio ângulo para expressar a função raiz:

$$\sqrt{z} = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{2}} \pm i\sqrt{\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{2}}, \quad z \neq 0,$$

o sinal à frente de cada raiz depende do quadrante de z.

Observe que a imagem da raiz quadrada principal tem argumento no intervalo $(-\pi/2, \pi/2]$. Isso se traduz no gráfico apresentando as cores correspondentes ao semiplano direito apenas.

Atente também para a descontinuidade de cores ao longo do eixo real negativo.



3.6 Limite de uma função complexa

Definição

Sejam $f : U \to \mathbb{C}$ e z_0 um ponto de fronteira de U ou ponto interior de U. O limite de f em z_0 é w_0 se

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0; \qquad z \in U \text{ e } 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon.$$

Nesse caso escrevemos

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0.$$

Vamos trabalhar limites usando o que já sabemos do cálculo multivariável: para calcular o limite de uma função complexa, vamos calcular o limite das suas partes real e imaginária.

O resultado principal que permite essa abordagem é

Teorema

Se

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0,$$

então

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = Re(w_0), \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = Im(w_0).$$

Reciprocamente, se

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = Re(w_0), \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = Im(w_0),$$

então

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0.$$

Usando as regras análogas para o limite de funções reais de duas variáveis reais, obtemos as regras para o cálculo de limites de funções complexas.

Proposição

Sejam z_0, w_0, m_0, $\lambda \in \mathbb{C}$ e as funções $f : U \to \mathbb{C}$, $g : V \to \mathbb{C}$.

- Se z_0 é ponto de fronteira ou interior de $U \cap V$ e $\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$ e $\lim_{z\to z_0} g(z) = m_0$, então

$$\lim_{z\to z_0} (f + \lambda g)(z) = w_0 + \lambda m_0.$$

- Se z_0 é ponto de fronteira ou interior de $U \cap V$ e $\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$ e $\lim_{z\to z_0} g(z) = m_0$, então

$$\lim_{z\to z_0} (fg)(z) = w_0 m_0.$$

- Se w_0 é ponto de fronteira ou interior de V e $\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$ e $\lim_{w\to w_0} g(w) = m_0$, então

$$\lim_{z\to z_0} (g \circ f)(z) = m_0.$$

Prof. Vanderley Ferreira - 2021

Outra regra fundamental no cálculo de limites é o critério de não-existência usando caminhos:

Se z se aproxima de z_0 por dois caminhos diferentes e os valores de $f(z)$ se aproximam de dois valores diferentes, então não existe $\lim_{z\to z_0} f(z)$.

Exemplo

Limites básicos:

$$\lim_{z\to z_0} C = C.$$

De fato, $u(x,y) = Re(C)$ e $v(x,y) = Im(C)$. Basta usarmos que o limite de uma função (real de duas variáveis reais) constante é a própria constante.

$$\lim_{z\to z_0} z = z_0.$$

Temos $u(x,y) = x$ e $v(x,y) = y$. Como funções (reais de duas variáveis reais) polinomiais são contínuas, $u \to Re(z_0)$ e $v \to Im(z_0)$. Portanto $u + iv \to z_0$.

Para $z_0 \neq 0$,

$$\lim_{z\to z_0} \frac{1}{z} = \frac{1}{z_0}.$$

Temos $u(x,y) = x/(x^2+y^2)$ e $v(x,y) = -y/(x^2+y^2)$. Portanto u e v são funções racionais - e contínuas exceto onde o denominador se anula.

Exemplo

Não existe
$$\lim_{z\to 0}\frac{\overline{z}}{z}.$$
De fato, temos
$$\frac{\overline{z}}{z}=\frac{x-iy}{x+iy}.$$
Fazendo $z\to 0$ pelo caminho $x=0$ (o eixo y), temos
$$\frac{\overline{z}}{z}=\frac{iy}{-iy}=-1,$$
já pelo caminho $x=y$ temos
$$\frac{\overline{z}}{z}=\frac{x-ix}{x+ix}=\frac{1-i}{1+i}=-i.$$
Como temos dois valores diferentes, o limite procurado não existe.

Definição

Sejam $f:U\to\mathbb{C}$ e z_0 um ponto de fronteira de U ou ponto interior de U. O limite de f em z_0 é infinito se
$$\forall R>0,\quad \exists\delta>0;\qquad z\in U \text{ e } 0<|z-z_0|<\delta\Rightarrow |f(z)-w_0|>R.$$
Nesse caso escrevemos
$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty.$$
O limite de f quando $z\to\infty$ é $w_0\in\mathbb{C}$ quando
$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists R>0;\qquad |z|>R\Rightarrow |f(z)-w_0|<\varepsilon.$$
Escrevemos
$$\lim_{z\to\infty} f(z)=w_0.$$

A definição dos limites é muito similar ao caso real. A principal diferença é que não fazemos distinção entre $+\infty$ e $-\infty$ no plano complexo: a expressão $z \to \infty$ singifica todos os pontos onde $|z|$ é suficientemente grande. Já a expressão $f(z) \to \infty$ significa que $|f(z)|$ cresce indefinidamente.

Exemplo

Para um polinômio de grau maior que 0,

$$\lim_{z \to \infty} p(z) = \infty.$$

De fato, seja $p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$ com $n \geq 1$ e $a_n \neq 0$. Escrevendo

$$p(z) = \left(\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \ldots + a_n \right) z^n = q(z) z^n,$$

observe que

$$\lim_{z \to \infty} q(z) = a_n,$$

pois as potências em q tem expoente negativo. Logo para $\varepsilon = |a_n|/2$, existe $R > 0$ suficientemente grande, tal que para $|z| > R$

$$|q(z) - a_n| < \varepsilon.$$

Segue que $|q(z)| \geq |a_n|/2 > 0$, e estimamos por fim

$$|p(z)| = |q(z)||z^n| \geq |z^n||a_n|/2.$$

Note que, diferente do caso de funções reais,

$$\lim_{z \to \infty} z = \infty$$

e

$$\lim_{z \to \infty} -z = \infty.$$

Exemplo

Considere $f(z) = e^x \cos(y) + ie^x \sin(y)$. Não existe $\lim_{z\to\infty} f(z)$.

De fato, considere o caminho $z = t + 0i$:

$$f(t + 0i) = e^t \cos 0 + ie^t \sin 0 = e^t.$$

Para $t > 0$, temos $f(t) = e^t \to \infty$, enquanto para $t < 0$ temos $f(t) = e^t \to 0$ (pois $t \to -\infty$).

Portanto o limite não pode existir.

3.7 Continuidade de uma função complexa

A definição de continuidade é análoga ao caso real.

Definição

A função f é contínua em z_0 quando

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0).$$

A função $f : U \to \mathbb{C}$ é contínua em $A \subset U$ quando f é contínua em z_0 para todo $z_0 \in A$.

Mas professor...

Não é preciso pedir que f esteja definida em z_0, que o limite exista e então que a igualdade seja válida?

Essas condições estão implícitas: não podemos ter a igualdade se $f(z_0)$ não está definida, por exemplo.

Exemplo

A função $\overline{z}$ é contínua em $\mathbb{C}$. De fato, temos

$$\overline{z} = x - iy \quad \Rightarrow \quad u(x,y) = x,\ v(x,y) = -y.$$

Como $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x = x_0$ e $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} -y = -y_0$, segue que $\lim_{z\to z_0} \overline{z} = \overline{z}_0$.

Exemplo

A função Arg é descontínua nos números reais negativos.

De fato, seja $t_0 < 0$, temos $Arg(t_0) = \pi$. No entanto o limite pelo caminho $t_0 + ti$, para $t \to 0^-$ se aproxima do valor $-\pi$. Assim Arg não pode ser contínua em t_0.

Mas professor...

A função Arg é descontínua em $z = 0$? Não podemos falar da continuidade da função em um ponto onde ela não está definida.

Se u e v são contínuas em A, então $f = u + iv$ é contínua em A.

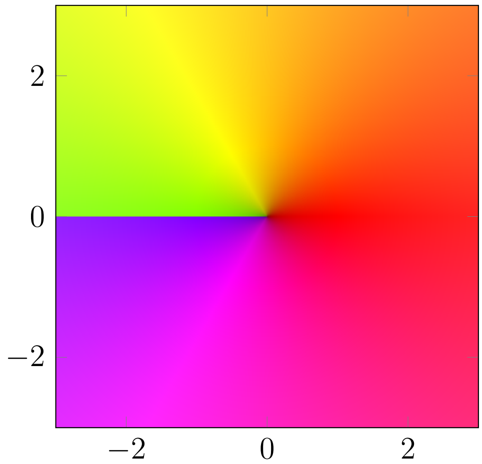
A propriedade acima pode ser usada para justificar que polinômios e funções racionais são contínuas em todo o seu domínio.

Como podemos visualizar continuidade no gráfico de uma função?

Informalmente, quando a função f varia continuamente, as funções $|f|$ e $\arg(f)$ são "contínuas". No gráfico isso se reflete com a intensidade e tom da cor variando gradualmente. Podemos identificar pontos de descontinuidade por um salto abrupto em uma dessas grandezas.

Exemplo

A função $\sqrt{\ }$ é descontínua em todos os pontos $t + 0i$, para t real negativo.



Exemplo

Cuidado - zeros de funções não são pontos de descontinuidade. Temos variação do tom da cor, mas a intensidade converge para zero. Compare os pontos $z = i$ onde a função tem um zero e $z = 1$, a função não é definida (e portanto não é contínua).