Funções de Variável Complexa

Sumário

5 Funções elementares **75**

5.1 Função exponencial 75

5.2 Funções hiperbólicas 80

5.3 Funções trigonométricas 85

5.4 Logaritmo complexo 91

Prof. Vanderley Ferreira - 2021

5 Funções elementares

Nessa seção buscamos encontrar funções complexas analíticas com o maior domínio possível que quando restritas à reta real concordam com funções elementares - sin, cos, exp.

Veremos que as funções obtidas satisfazem as mesmas equações diferenciais da versão real, mas trazem também novas propriedades.

5.1 Função exponencial

Definição

A função exponencial complexa é

$$\exp(z) = e^x \cos y + i\, e^x \sin y.$$

O domínio da exponencial é $\mathbb{C}$.

Como a exponencial real, seno e cosseno são funções com derivadas contínuas, para verificar a analiticidade de exp basta testar as condições de Cauchy-Riemann. Tome $u = e^x \cos y$ e $v = e^x \sin y$, podemos calcular

$$u_x = e^x \cos y, \quad v_x = e^x \sin y, \quad u_y = -e^x \sin y, \quad v_y = e^x \cos y,$$

verificamos então que para todo x, y, temos

$$u_x = v_y = u, \quad u_y = -v_x = -v,$$

e exp é de fato analítica.

Podemos então calcular sua derivada:

$$(\exp z)' = u_x + iv_x = e^x \cos y + ie^x \sin y = \exp z.$$

Temos portanto a mesma equação diferencial, $\exp' = \exp$.

A imagem pela exponencial complexa da reta $z = x_0 + iy$, para x_0 real fixo, é um círculo.

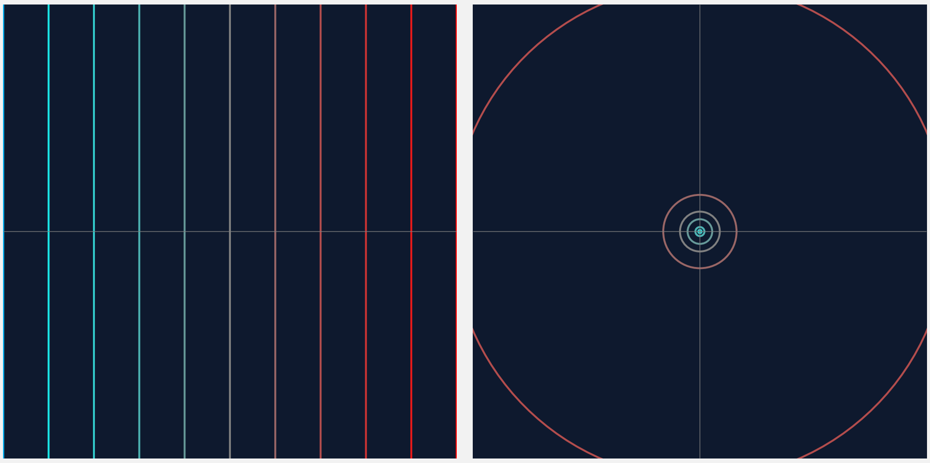
De fato, temos

$$\exp(x_0 + iy) = e^{x_0}(\cos y + i \sin y),$$

calculando a sua norma, temos

$$|\exp(x_0 + iy)| = |e^{x_0}||(\cos y + i \sin y)| = e^{x_0}(\cos^2 y + \sin^2 y) = e^{x_0}.$$

Assim a reta vertical $x = x_0$ é transformada no círculo de raio e^{x_0} centrado na origem. (Note que como x_0 é real, e^{x_0} é sempre um número positivo, mesmo que possa ser pequeno.)



Para verificar que exp é uma extensão da exponencial real, observe que quando $y = 0$ temos

$$\exp(x + 0i) = e^x(\cos 0 + i \sin 0) = e^x.$$

Assim, em particular, a imagem da reta real é o intervalo $(0, \infty)$.

Outros valores interessantes da exponencial incluem a imagem da reta $y = \pi$, onde temos

$$\exp(x + i\pi) = e^x(\cos \pi + i \sin \pi) = -e^x,$$

ou seja, nessa reta a exponencial é negativa (e assume todos os valores reais negativos).

A reta $y = \pi/2$, tem como imagem o eixo imaginário complexo positivo:

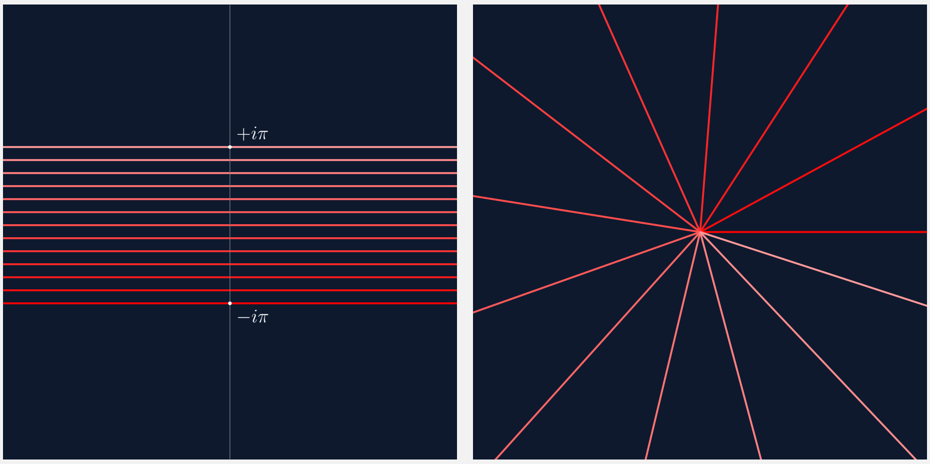
$$\exp(x + i\pi/2) = e^x(\cos \pi/2 + i \sin \pi/2) = e^x(0 + 1i) = ie^x.$$

Diferente da exponencial real que é sempre positiva, a exponencial complexa assume todos os valores $w \neq 0$.

Já vimos que em retas horizontais específicas a função cobre semirretas começando na origem. Isso é verdade em geral: dado $y_0 \in \mathbb{R}$ fixo, a imagem da reta $z = x + iy_0$ é

$$\exp(x + iy_0) = e^x(\cos y_0 + i \sin y_0) = e^x(z_0),$$

onde $z_0 = \cos y_0 + i \sin y_0$ é um complexo unitário. Fazendo variar y_0 no intervalo $(-\pi, \pi]$, o número $\exp(iy_0)$ percorre todas as direções a partir da origem. Assim a imagem de exp é $\mathbb{C} \backslash \{0\}$.



Prof. Vanderley Ferreira - 2021

O valor de exp no ponto $i\pi$ dá origem à identidade de Euler:

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Exemplo

A parte trigonométrica da exponencial produz novas propriedades de simetria. A mais importante é que a exponencial é periódica, com período $2\pi i$:

$$\exp(z + i2\pi) = \exp(x + i(y + 2\pi)) = e^x \cos(y + 2\pi) + ie^x \sin(y + 2\pi)$$

$$= e^x \cos y + ie^x \sin y = \exp(z).$$

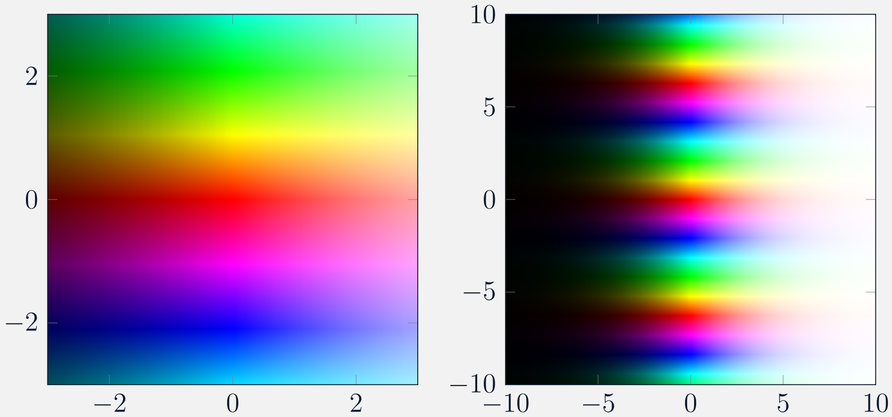
Uma segunda simetria é

$$\exp(z + i\pi) = -\exp(z),$$

que segue de $\sin(t + \pi) = -\sin t$, $\cos(t + \pi) = -\cos t$. Assim a imagem da função exp é determinada pela faixa

$$\{z = x + iy;\ -\pi < y \leq \pi\}.$$

Podemos ver no mapa de cores que a imagem dessa faixa horizontal se repete nas demais, alternando o sinal.



Exemplo

A forma exponencial do número complexo z é

$$z = |z| \exp(iArg(z)),$$

também escrita

$$z = |z|e^{iArg(z)}.$$

A notação exponencial abrevia a escrita de $\cos Arg(z) + i \sin Arg(z)$, elas são de fato iguais:

$$\exp(i\varphi) = \exp(0 + i\varphi) = e^0 \cos \varphi + ie^0 \sin \varphi.$$

Exemplo

Ainda temos a propriedade operacional

$$\exp(z + w) = \exp z \, \exp w$$

De fato, da definição acima temos

$$\exp(x + iy + r + is) = e^{x+r}(\cos(y + s) + i \sin(y + s)),$$

e das propriedades da exponencial real $e^{x+r} = e^x e^r$.

Concluímos observando que já sabemos que o produto de dois complexos soma os argumentos:

$$e^x e^r(\cos(y+s)+i\sin(y+s)) = e^x e^r(\cos y+i\sin y)(\cos s+i\sin s) = \exp(z)\ \exp(w).$$

5.2 Funções hiperbólicas

Definição

Seno hiperbólico

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

Cosseno hiperbólico

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

Como exp é definida no plano todo, o domínio de sinh e cosh é também $\mathbb{C}$. Eles são definidos usando a expressão análoga à real, assim são extensões das funções reais:

$$\cosh(x + 0i) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Exemplo

Podemos calcular as derivadas escrevendo as funções na sua forma binomial

$$\cosh z = \frac{e^x \cos y + ie^x \sin y + e^{-x}\cos(-y) + ie^{-x}\sin(-y)}{2}$$

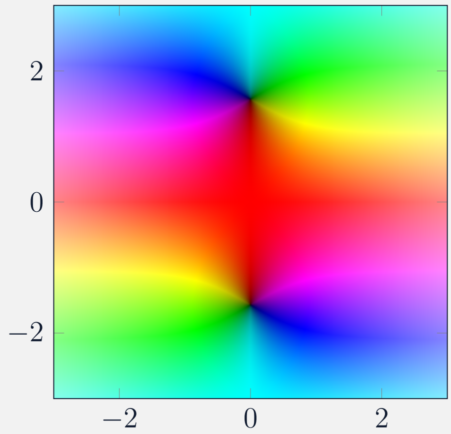
$$= \frac{e^x + e^{-x}}{2}\cos y + i\frac{e^x - e^{-x}}{2}\sin y = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y.$$

Derivando as partes real e imaginária do cosseno hiperbólico, temos

$$u_x = \sinh x \cos y,\ \ u_y = -\cosh x \sin y,\ \ v_x = \cosh x \sin y,\ \ v_y = \sinh x \cos y,$$

e vemos que $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$. Concluímos que cosh é analítica com

$$(\cosh z)' = u_x + iv_x = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y.$$



Exemplo

Verifique que

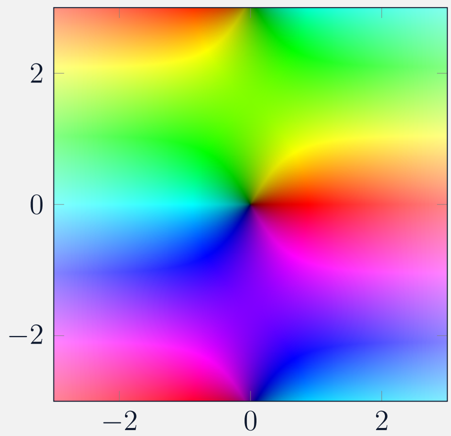
$$\sinh z = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y.$$

Derivando as partes real e imaginária temos

$$u_x = \cosh x \cos y,\ u_y = -\sinh x \sin y,\ v_x = \sinh x \sin y,\ v_y = \cosh x \cos y,$$

e vemos que $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$. Concluímos que sinh é analítica com

$$(\sinh z)' = u_x + iv_x = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y = \cosh z.$$



Exemplo

Voltando no cosseno hiperbólico, a última expressão nos diz que

$$\cosh' = \sinh, \qquad \sinh' = \cosh,$$

as mesmas equações diferenciais satisfeitas pelas funções reais originais.

As identidades que seguem da equação diferencial também são mantidas. Por exemplo, podemos verificar diretamente que para todo z complexo

$$(\cosh z)^2 - (\sinh z)^2 = 1.$$

Prof. Vanderley Ferreira - 2021

Exemplo

Vamos encontrar todos os zeros do seno e cosseno hiperbólicos.

Começando com cosh, temos a equação

$$\cosh z = 0 \Longrightarrow \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \cosh x \cos y = 0 \\ \sinh x \sin y = 0 \end{cases}$$

Como x, y são reais, $\cosh x \neq 0$ sempre. Da primeira equação segue $\cos y = 0$ e $y = \pi/2 + k\pi$, k inteiro. Nesse caso $\sin y = \pm 1$, e da segunda equação segue $x = 0$ (o único zero de sinh na reta real). Portanto todos os zeros estão no eixo imaginário,

$$\cosh z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = i\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right), \; k \in \mathbb{Z}.$$

Verifique que

$$\sinh z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = i\,(k\pi)\,, \; k \in \mathbb{Z}.$$

Definição

As outras funções são definidas a partir de seno e cosseno, conforme usual.

Tangente hiperbólica

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$$

Cotangente hiperbólica

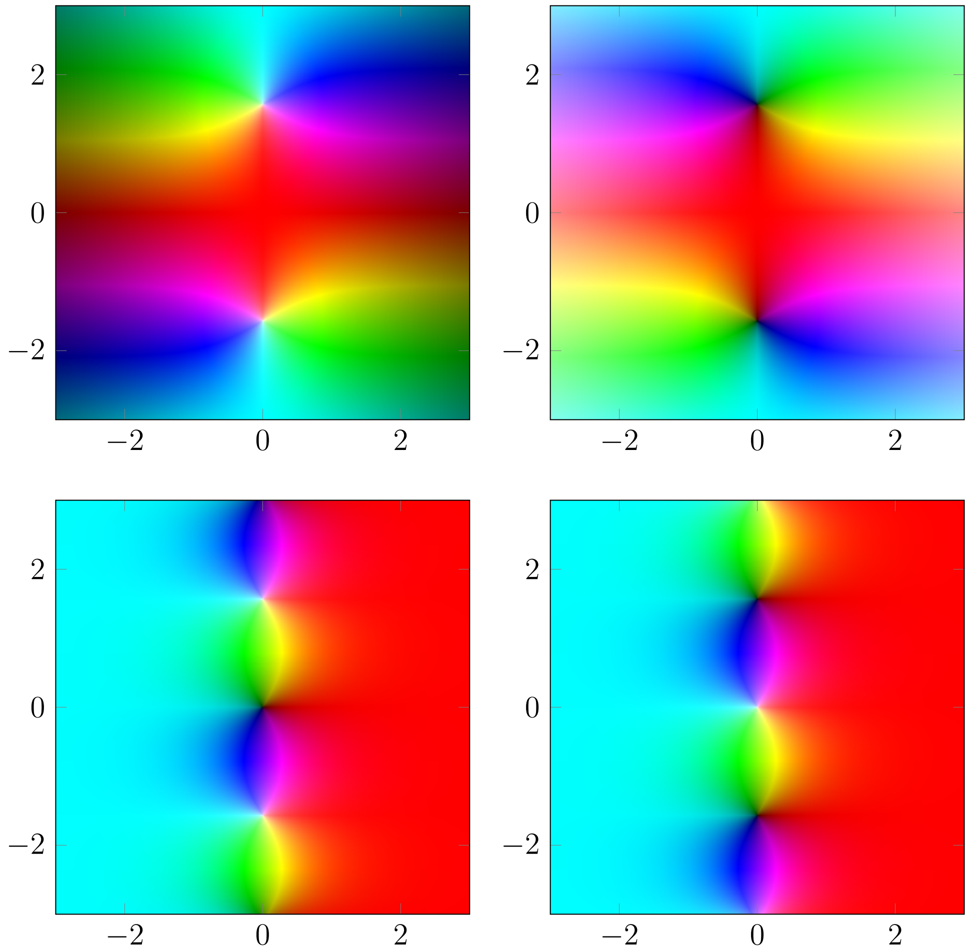
$$coth\ z = \frac{\cosh z}{\sinh z}$$

Cossecante hiperbólica

$$csch\ z = \frac{1}{\sinh z}$$

Secante hiperbólica

$$sech\ z = \frac{1}{\cosh z}$$



Exemplo

Secante e tangente hiperbólicas são funções analíticas exceto nos pontos onde $\cosh z = 0$, isto é, no conjunto

$$\mathbb{C} \backslash \left\{ i \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right),\ k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Usando as regras de derivação, verificamos que

$$(sechz)' = -\frac{\sinh z}{\cosh z^2} = -sechz \tanh z,$$

$$(\tanh z)' = \left(\frac{\sinh z}{\cosh z} \right)' = \frac{\cosh z^2 - \sinh z^2}{\cosh z^2} = \frac{1}{\cosh z^2} = sechz^2.$$

Exemplo

Verifique de forma similar que cossecante e cotangente hiperbólicas são funções analíticas, exceto nos pontos onde $\sinh z = 0$, e suas derivadas coincidem com as derivadas da versão real.

5.3 Funções trigonométricas

Definição

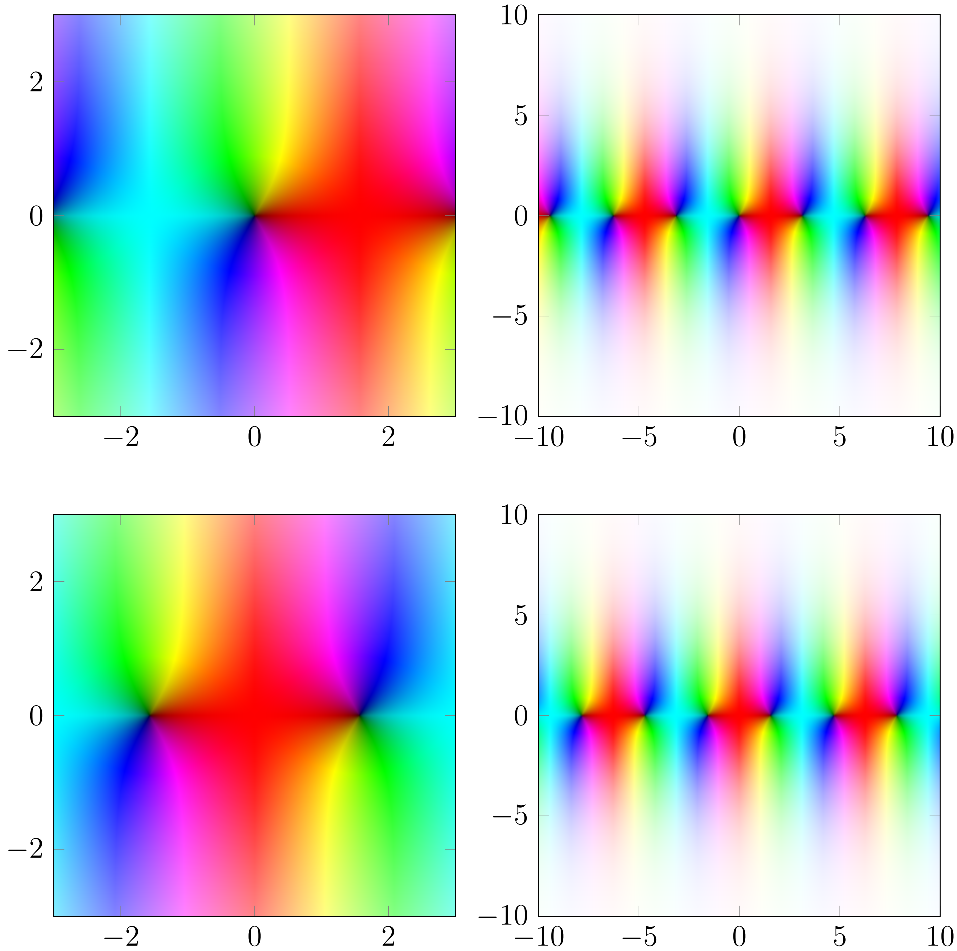
Para $z \in \mathbb{C}$, definimos

$$\sin z = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i},$$
$$\cos z = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}.$$

Comparando as expressões de $\exp(iy)$ e $\exp(-iy)$, para y real, vemos que

$$\exp iy + \exp(-iy) = 2\cos y, \qquad \exp iy - \exp(-iy) = 2i \sin y.$$

Como as expressões à esquerda podem ser calculadas substituindo y por z complexo qualquer, elas dão origem à definição de seno e cosseno acima.


2
0
−2
−2 0 2
10
5
0
−5
−10
−10 −5 0 5 10
2
0
−2
−2 0 2
10
5
0
−5
−10
−10 −5 0 5 10

Exemplo

Seno e cosseno são portanto funções definidas em todo $\mathbb{C}$. Vamos verificar onde são analíticas.

Escrevendo $w = iz$ nas definições, temos

$$\cos z = \frac{\exp w + \exp -w}{2} = \cosh w,$$

$$\sin z = \frac{\exp w - \exp -w}{2i} = -i \sinh w,$$

uma vez que $1/i = -i$. Temos portanto

$$\cos z = \cosh iz, \qquad \sin z = -i \sinh iz.$$

Como vimos que sinh e cosh são funções inteiras, segue que seno e cosseno também são, e sua derivada é obtida pela regra da cadeia

$$(\sin z)' = (-i \sinh iz)' = -i^2 \cosh iz = \cos z,$$

e

$$(\cos z)' = (\cosh iz)' = i \sinh iz = -\sin z,$$

isto é, temos as mesmas derivadas das funções reais.

Um ponto chave do exemplo anterior é a relação entre as funções trigonométricas e hiperbólicas, que nos permite evitar trabalho dobrado:

$$\cos z = \cosh iz, \qquad \sin z = -i \sinh iz.$$

Exemplo

A manutenção das relações $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$ produz as mesmas derivadas para as versões complexas das outras funções trigonométricas. Além disso, temos ainda a identidade

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1,$$

ela pode ser verificada derivando os dois lados.

Exemplo

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + i\ln(2+\sqrt{3})\right) = 2$$

Embora ainda tenhamos que a soma dos quadrados de seno e cosseno é constante, isso não significa que as funções são limitadas. De fato, seno e cosseno são funções complexas sobrejetoras - a equação $\sin z = w$ sempre tem infinitas soluções.

Por exemplo, tomando $w = 2$, temos a equação

$$\sin x \cosh y + i \cos x \sinh y = 2 + 0i,$$

comparando parte real e imaginária vem

$$\sin x \cosh y = 2, \qquad \cos x \sinh y = 0.$$

Suponha primeiro que $\sinh y = 0$, segue que $y = 0$ e $\cosh y = 1$. Mas a equação $\sin x = 2$ não tem solução.

Segue que $y \neq 0$ e $\cos x = 0$, $\sin x = \pm 1$. Ficamos então com $\cosh y = \pm 2$, que só tem solução no caso positivo: $y = \ln(2 \pm \sqrt{3})$, $x = \pi/2 + 2k\pi$,

$$z = \pi/2 + 2k\pi + i\ \ln(2 \pm \sqrt{3}).$$

Exemplo

A função *sinc* é definida por

$$sinc(z) = \begin{cases} \dfrac{\sin z}{z}, & z \neq 0, \\ 1, & z = 0. \end{cases}$$

A função real *sinc* é contínua e derivável em toda a reta. Vamos estudar a analiticidade da sua extensão complexa.

Sabemos que como quociente de duas funções inteiras ($\sin z$ e z), a função *sinc* já é analítica no conjunto $z \neq 0$ e tem derivada

$$sinc'(z) = \frac{z \cos z - \sin z}{z^2} = \frac{\cos z}{z} - \frac{\sin z}{z^2}.$$

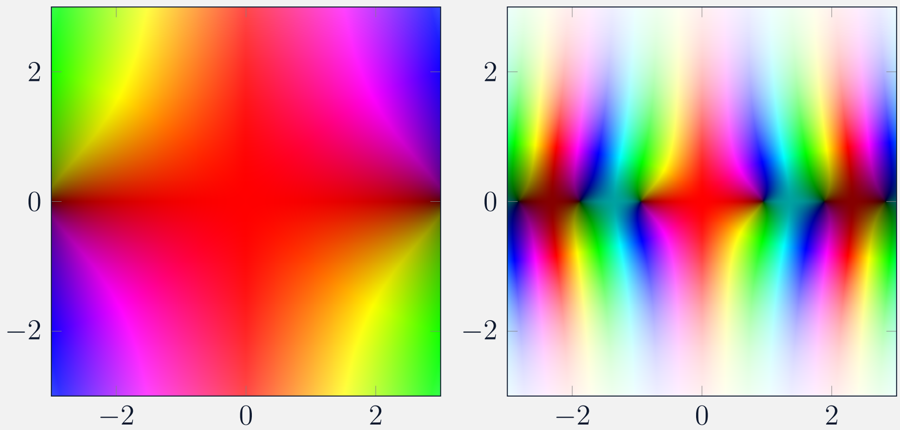
Vamos agora analisar o ponto restante usando a definição de derivada. Temos

$$\frac{sinc(z) - sinc(0)}{z - 0} = \frac{\frac{\sin z}{z} - 1}{z} = \frac{\sin z - z}{z^2},$$

logo

$$sinc'(0) = \lim_{z \to 0} \frac{\sin z - z}{z^2} = 0.$$

Portanto *sinc* é uma função inteira.



Exemplo

Vamos descrever como o seno transforma o plano.

Para uma reta vertical $x = x_0$, parametrizada por $z(y) = x_0 + iy$, temos

$$\sin z = \sin x_0 \cosh y + i \cos x_0 \sinh y = u + iv$$

Observe que

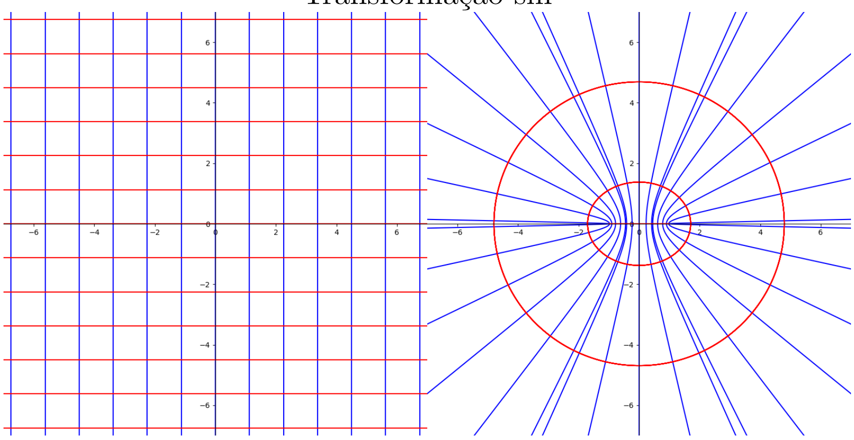
$$\cosh y^2 - \sinh y^2 = 1 \implies \frac{u^2}{\sin {x_0}^2} - \frac{v^2}{\cos {x_0}^2} = 1,$$

e quando y varre os números reais, percorremos um dos ramos da hipérbole (de acordo com o sinal de x_0). Assim o par de retas verticais $x = \pm x_0$ é transformado em uma hipérbole.

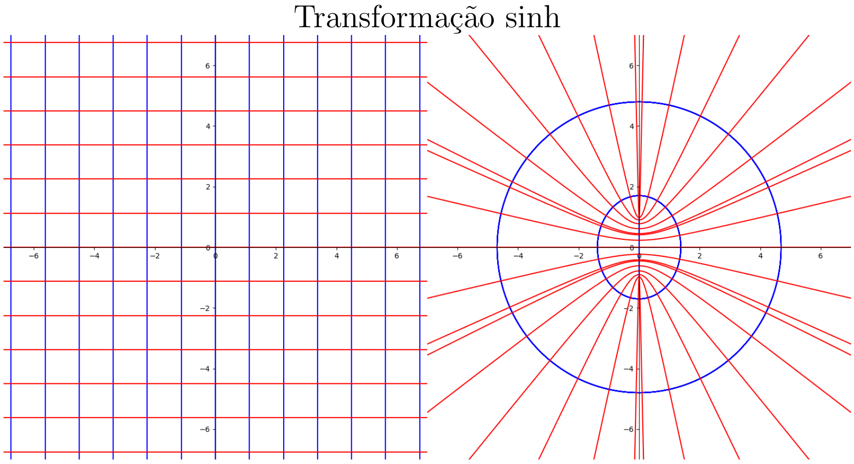
Para uma reta horizontal $y = y_0$, um cálculo similar mostra que fazendo x percorrer os reais, a curva $\sin(x + iy_0)$ percorre infinitas vezes a elipse

$$\frac{u^2}{\cosh {y_0}^2} + \frac{v^2}{\sinh {y_0}^2} = 1.$$

Transformação sin



Transformação sinh



5.4 Logaritmo complexo

Queremos definir o logaritmo de um número complexo, de modo que satisfaça a igualdade

$$\exp(\log z)) = z.$$

Escrevendo $w = \log z = u + iv$, obtemos a equação

$$z = \exp(u + iv) = e^u(\cos v + i \sin v).$$

Observe que a expressão à direita é similar à forma polar de z. Escrevendo $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ também na forma polar, obtemos as igualdades

$$r = e^u, \qquad v = \varphi + 2k\pi.$$

Resolvendo para u e v, obtemos

$$u = \ln r, \qquad v = \varphi + 2k\pi.$$

Observe que o sistema tem infinitas soluções - o logaritmo é uma função multivalorada. Antes de analisar a versão multivalorada, vamos estudar o valor principal do logaritmo.

Definição

O logaritmo principal de z é

$$Log(z) = \ln|z| + iArg(z).$$

Prof. Vanderley Ferreira - 2021

Exemplo

Para números reais positivos o valor principal do logaritmo coincide com o logaritmo natural

$$Log(x+0i) = \ln|x| + i0 = \ln x.$$

Temos também os valores

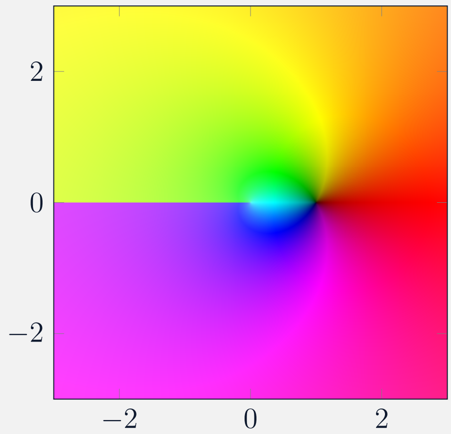
$$Log(i) = \ln|i| + iArg(i) = \ln 1 + i\pi/2 = i\pi/2,$$

$$Log(-i) = \ln|-i| + iArg(-i) = -i\pi/2,$$

$$Log(3+4i) = \ln 5 + i\arccos(3/5),$$

$$Log(-1) = \ln 1 + iArg(-1) = i\pi.$$

Observe que $Log(0)$ é indefinido – esse ponto não está no domínio.



Exemplo

A função Log tem o mesmo domínio que Arg, isto é,

$$\mathbb{C}\backslash\{0\}.$$

No entanto, a função é contínua no conjunto

$$\mathbb{C}\backslash\{t+0i;\ t \in (-\infty, 0]\,\}.$$

Não existe o limite de Log em qualquer ponto do eixo real negativo:

De fato, considere $r > 0$ e o ponto $z = -r$, considerando o caminho circular $\gamma(t) = r\exp(it)$, temos

$$Log(\gamma(t)) = \ln r + iArg(\gamma(t)) = \ln r + it,$$

no intervalo $(-\pi, \pi]$.

Quando $t \to \pi$ a curva $\gamma(t)$ se aproxima de $-r$ por cima, enquanto o valor de $Log(\gamma(t))$ se aproxima de $\ln r + i\pi$.

Fazendo $t \to -\pi$, a curva novamente se aproxima de $-r$, desta vez por baixo. O valor de $Log(\gamma(t))$ se aproxima de $\ln r - i\pi$, assim o limite em questão não pode existir.

Exemplo

No conjunto aberto

$$\mathbb{C}\backslash\{t+0i;\ t\in(-\infty,0]\,\}$$

a função Log é analítica e

$$(Log(z))' = \frac{1}{z}.$$

Vamos analisar sua derivada através das ECR na forma polar

$$u_r = \frac{v_\varphi}{r}, \qquad v_r = -\frac{u_\varphi}{r}.$$

Escrevendo u e v em coordenadas polares, temos

$$u(r,\varphi) = \ln r, \qquad v(r,\varphi) = \varphi,$$

no domínio considerado.

Calculando as derivadas parciais, temos

$$u_r = \frac{1}{r}, \quad u_\varphi = 0, \quad v_r = 0, \quad v_\varphi = 1,$$

e verificamos por inspeção que as ECR são satisfeitas. Uma vez que as funções u e v tem derivadas parciais contínuas para $r > 0$, segue que Log será analítica em todos os pontos onde for contínua.

Portanto Log é analítica em $\mathbb{C}\backslash\{t+0i;\ t\in(-\infty,0]\,\}$ e aplicando novamente ECR podemos calcular a derivada:

$$(Logz)' = (u_r + iv_r)(\cos\varphi - i\sin\varphi) = \frac{1}{r}(\cos\varphi - i\sin\varphi) = \frac{1}{z}.$$

Exemplo

Atenção: usar as equações corretas simplifica muito o trabalho.

Nesse exemplo mostramos que Log é analítica mais uma vez, mas usando a versão das ECR para variáveis retangulares. Como você pode observar, é menos conveniente.

Considere $u(x,y) = ln\sqrt{x^2+y^2}$ e, como vimos na semana 1,

$$v(x,y) = Arg(x+iy) = \begin{cases} \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & \text{se } y \geq 0,\ x^2+y^2>0, \\ -\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & \text{se } y<0. \end{cases}$$

As derivadas parciais de u são mais diretas:

$$u_x = \frac{x}{x^2+y^2}, \qquad u_y = \frac{y}{x^2+y^2}.$$

Para v, considere primeiro a função $m = x/\sqrt{x^2+y^2}$, temos as derivadas

$$m_x = \frac{y^2}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}, \qquad m_y = \frac{-xy}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}.$$

Note que a imagem de m está sempre no intervalo $(-1,1)$ para $y \neq 0$, e nesse intervalo a função arccos é diferenciável.

Vamos primeiro calcular para $y>0$. Temos

$$v_x = (\arccos m)_x = -\frac{1}{\sqrt{1-m^2}}m_x = -\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|y|}\frac{y^2}{(\sqrt{x^2+y^2})^3} = -\frac{y}{x^2+y^2},$$

e

$$v_y = (\arccos m)_y = -\frac{1}{\sqrt{1-m^2}}m_y = -\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|y|}\frac{-xy}{(\sqrt{x^2+y^2})^3} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Valem portanto as ECR no semiplano superior $y>0$.

Já para $y<0$, temos

$$v_x = (-\arccos m)_x = \frac{1}{\sqrt{1-m^2}}m_x = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|y|}\frac{y^2}{(\sqrt{x^2+y^2})^3} = -\frac{y}{x^2+y^2},$$

e

$$v_y = (-\arccos m)_y = \frac{1}{\sqrt{1-m^2}}m_y = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|y|}\frac{-xy}{(\sqrt{x^2+y^2})^3} = \frac{x}{x^2+y^2},$$

já que $y/|y| = -1$ nesse semiplano. Portanto, também temos ECR no semiplano $y<0$.

Para $x > 0$ e $y = 0$ temos

$$v_x(x,0) = \lim_{h\to 0} \frac{v(x+h,0) - v(x,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0,$$

$$v_y(x,0) = \lim_{h\to 0} \frac{v(x,h) - v(x,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\arccos(x/\sqrt{x^2+h^2}) - 0}{h} = 0.$$

Para concluir a analiticidade, falta ainda verificar que as derivadas parciais obtidas são contínuas no domínio - em particular, verificar os limites no eixo real positivo para v_x e v_y.

Observe que temos novamente

$$(Log\ z)' = u_x + iv_x = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{1}{z}.$$

Exemplo

Considere $f(z) = Log(z^2)$, vamos determinar a derivada de f e onde ela é analítica. A função f é a composta das funções $g(z) = Log(z)$ e $h(z) = z^2$, cada uma analítica no seu domínio. Assim temos a derivada

$$f'(z) = [g(h(z))]' = g'(h(z))h'(z) = \frac{1}{z^2}2z = \frac{2}{z}.$$

A regra da cadeia pode ser aplicada quando g é derivável em $h(z)$, isto é, a imagem de z^2 precisa estar no domínio do Log. Assim precisamos remover do domínio de f os pontos onde z^2 é um número real não-positivo:

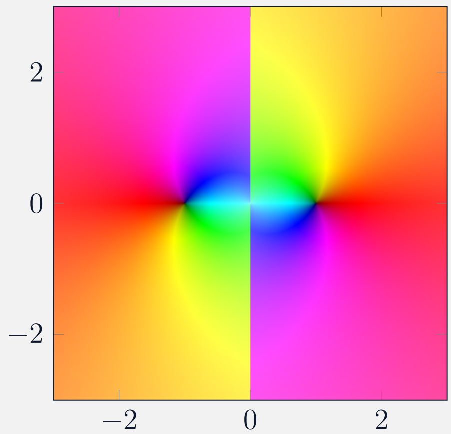
$$z^2 = x^2 - y^2 + i2xy = t + 0i, \quad t \in (-\infty, 0],$$

resolvendo obtemos $xy = 0$, que implica que $x = 0$ ou $y = 0$. Para que $x^2 - y^2$ seja não-positivo, ou $x = 0 = y$ ou $y > 0$, pois são números reais. Assim temos necessariamente $x = 0$.

Segue que f é analítica no conjunto

$$\mathbb{C} \backslash \{z = 0 + ti; \quad t \in \mathbb{R}\},$$

o plano complexo exceto o eixo imaginário.



Prof. Vanderley Ferreira - 2021

Exemplo

Qual o domínio da função

$$f(z) = Log(\exp(z))?$$

Onde essa função é analítica?

A composição na outra direção, $\exp(Log)$, é definida no domínio de Log, isto é, $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ e é igual à identidade nesse domínio:

$$\exp(Log(z)) = \exp(\ln|z| + iArg(z)) = e^{\ln|z|}\exp(iArg(z)) = z.$$

Para verificar onde f está definida, precisamos determinar quando $\exp(z)$ não está no domínio de Log. Porém $\exp(z) \neq 0$ sempre, logo o domínio de f é $\mathbb{C}$.
Vamos reescrever f como

$$f(z) = Log(\exp(z)) = Log(e^x \cos y + ie^x \sin y)$$

$$= \ln|e^x| + iArg(e^x \cos y + ie^x \sin y) = x + iArg(\cos y + i \sin y).$$

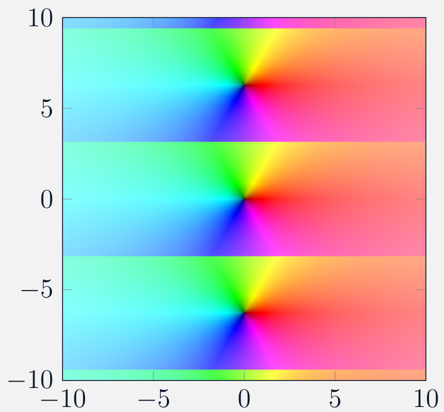
Para $y \in (-\pi, \pi]$ temos $Arg(\cos y + i \sin y) = y$ e $f(z) = z$. No entanto o Arg na expressão de f acima mostra que temos descontinuidades.
Sempre que $\exp(z)$ é real negativo temos um salto na função Log, isto acontece quando

$$\exp(z) = t + 0i \quad \Rightarrow \quad e^x \cos yt,\ e^x \sin y = 0,$$

a solução da equação acima é $y = (2k+1)\pi$, para k inteiro. A função é analítica em cada uma das regiões

$$\{x + iy;\ x \in \mathbb{R},\ y \in (\pi(2k-1), \pi(2k+1))\}.$$

Cada região onde f é analítica também é uma região onde exp é injetora.



Prof. Vanderley Ferreira - 2021

Mas professor...

A derivada de Log em -1 não seria -1?

Boa pergunta. Embora a função derivada $1/z$ esteja definida em todo complexo não nulo, e em particular no ponto -1, uma função não pode ter derivada em um ponto de descontinuidade. Assim $Log'(-1)$ não existe.

Veremos na próxima semana como definir outras versões do logaritmo (outros ramos) que tem derivada no eixo real negativo e quais as consequências de escolher um ou outro ramo.