MAT 46 – Série de Exercícios 1 Respostas

Exercício 1.

1.1. $-7i$

1.2. $\frac{2}{5} + \frac{16}{5}i$

1.3. $-2+2i$

1.4. 16

Exercício 2.

2.1. a reta $y = 0$

2.2. o círculo $(x-1)^2 + y^2 = 1$

2.3. dois pontos $\left(\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right) i$

2.4. $xy < -1/2$, o "exterior" da hipérbole

2.5. anel centrado em $-3-i$

2.6. $y < x$, semiplano

Exercício 3.

Abertos: 2.4, 2.5, 2.6

Fechados: 2.1, 2.2, 2.3

Limitados: 2.2, 2.3, 2.5

Exercício 4.

4.1. 2

4.2. $3i$

4.3. $\sqrt[10]{2}(\cos\pi/20 + i\sin\pi/20)$

4.4. $2^{7/16}(\cos\pi/32 + i\sin\pi/32)$

Exercício 5.

5.1. Verdadeiro

5.2. Falso

Exercício 6. Elipse. Vértices?

Exercício 7.

7.1. Desigualdade superior:

$$|z^2 - 3| \leq |z^2| + |-3| = |z|^2 + 3 \leq 1 + 3 = 4,$$

usamos na sequência a desigualdade triangular, a igualdade do módulo do produto e a hipótese $|z| = 1$.

Desigualdade inferior:

$$|z^2 - 3| = |3 - z^2| \geq ||3| - |z^2|| = 3 - |z|^2 = 2 > 1,$$

usamos na sequência a desigualdade triangular inversa

$$|z - w| \geq ||z| - |w||,$$

a informação de que $|3| > |z|$ para remover o primeiro módulo e por fim a hipótese $|z| = 1$.

7.2.

$$|(z+1)/(z+i)| = |z+1|/|z+i|$$

Temos $|z| = 2$, assim $|z+1| \leq |z| + |1| = 2 + 1 = 3$.

Por outro lado, estamos dividindo por $|z + i|$, logo precisamos encontrar o menor valor possível desse termo. Temos

$$|z+i| \geq ||z| - |i|| = |2-1| = 1.$$

Daqui

$$\frac{1}{|z+i|} \leq \frac{1}{1} \implies \frac{|z+1|}{|z+i|} \leq \frac{3}{1} = 3.$$