Instituto Tecnológico de Aeronáutica

MAT46 - Funções de Variável Complexa - Lista 10

Fórmula de Cauchy

Sempre que não for expresso, considere que caminhos fechados são percorridos no sentido antihorário.

Exercício 1. **

Exercício 2. Calcule as integrais abaixo.

(1) 0

(2) aplicando o teorema de Cauchy e depois a fórmula de Cauchy,

$$\int_{|z|=4} \frac{1}{z^2+z+1}\,dz = \int_{|z+1/2-\sqrt{3}/2|=1} \frac{i}{\sqrt{3}} \frac{1}{z+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}} dz + \int_{|z+1/2+\sqrt{3}/2|=1} \frac{i}{\sqrt{3}} \frac{1}{z+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}} dz = 0$$

(3) $\displaystyle\int_{|z|=4} \frac{\mathrm{Log}(z+5)}{z^2+2z+1}\,dz = 2\pi i\left(\frac{1}{-1+5}\right) = \frac{\pi}{2}i$

(4) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{e^{z^3}}{z(z-1)^2}\,dz = 2\pi i(g(0)-g(1)+g'(0))$, onde $g(z)=\exp(z^3)$

(5) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z^n}{z-1}\,dz = 2\pi i n$

(6) 0

(7) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\sinh(z)}{z^m}\,dz, = \begin{cases} 0, & m \leq 0, \\ \frac{\pi i}{(m-1)!}(1+(-1)^{1+m}), & m > 0. \end{cases}$

(8) 0

(9) $-2\pi i$

(10) $\pi i/(2e)$

(11) $\displaystyle\int_{|z-1|=1} \left(\frac{z}{z-1}\right)^n dz = 2\pi i n$

(12) $\pi i/2$

(13) *****************

Exercício 3. Considerando a integral $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z}\,dz$ prove que

3.1. $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{\cos t}\cos(\sin t)\,dt = \pi.$ **3.2.** $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{\cos t}\cos(\sin t)\,dt = 2\pi.$ **3.3.** $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{\cos t}\sin(\sin t)\,dt = 0.$

Da fórmula de Cauchy, como exp é inteira,

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z}\,dz = 2\pi i e^0 = 2\pi i.$$

Parametrizando o contorno como $\gamma(t) = \exp(it)$ no intervalo $[-\pi, \pi]$, temos a derivada $\gamma'(t) = i\exp(it)$ e a integral fica

$$\int_{|z|=1} \frac{\exp(z)}{z}\,dz = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\exp(\exp(it))}{\exp(it)} i\exp(it)dt = i\int_{-\pi}^{\pi} \exp(\exp(it))dt.$$

Expandindo a exponencial dentro da integral obtemos

$$\int_{|z|=1} \frac{\exp(z)}{z}\,dz = i\int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos(t)}\cos(\sin t) + ie^{\cos(t)}\sin(\sin t))dt$$

Seguem (3.2) e (3.3) de

$$2\pi i = i\int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos(t)}\cos(\sin t)dt - \int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos(t)}\sin(\sin t))dt.$$

Para a última integral (3.1), vamos usar que a função integrada é par:

$$h(t) = e^{\cos(t)}\cos(\sin t) \Rightarrow h(-t) = e^{\cos(-t)}\cos(\sin -t) = e^{\cos(t)}\cos(-\sin t) = h(t).$$

Do cálculo real,

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos(t)}\cos(\sin t)dt = 2\int_{0}^{\pi} e^{\cos(t)}\cos(\sin t)dt.$$

Exercício 4. Use a fórmula de Cauchy.

Exercício 5. Tome $f = u + iv$ onde v é uma conjugada harmônica de u em D. Segue que f é analítica em D e aplicando a fórmula de Cauchy no contorno $|z - z_0| = \rho$ fornece

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{z - z_0}dz.$$

Parametrizando o círculo como $\gamma(t) = \rho\exp(it) + z_0$, temos a derivada $\gamma'(t) = \rho i\exp(it)$ e a integral acima fica

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{2\pi} \frac{f(\rho\exp(it) + z_0)}{\rho\exp(it)}\rho i\exp(it)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} f(\rho\exp(it) + z_0)dt.$$

Separando a parte real e imaginária da equação acima obtemos a fórmula procurada.

Bons estudos.