Instituto Tecnológico de Aeronáutica

MAT46 - Funções de Variável Complexa - Lista 11

Integral III - Consequências da fórmula de Cauchy

Exercício 1. **

Exercício 2. Como $|f(z)| \geq 1$ no disco, f não tem nenhuma raiz. Logo $g(z) = 1/f(z)$ é analítica no disco e $g(0) = 1$. Além disso $|g(z)| = 1/|f(z)| \leq 1$, logo $|g|$ assume seu valor máximo no interior do disco. Pelo princípio do módulo máximo g é constante: $g \equiv 1$, logo $f \equiv 1$.

Exercício 3. (1) * (2) * (3) e (4) ∞

Exercício 4. Considere o polinômio complexo $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, tal que $|p(z)| \leq 1$, para todo $z \in \mathbb{C}$, com $|z| \leq 1$. Mostre que $|p(z)| \leq |z|^n$, para todo $z \in \mathbb{C}$, tal que $|z| \geq 1$.

Solução

Esse problema precisa de uma versão mais forte do princípio do máximo forte do que nós enunciamos:

Teorema: Princípio do Módulo Máximo

Se f é analítica no conjunto D aberto e conexo (não precisa ser limitado, não precisa ser simplesmente conexo) e

$$|f(z_0)| \geq |f(z)|$$

para todo $z \in D$ em alguma vizinhança de $z_0 \in D$, então f é constante em D.

O aberto D nesse caso será o exterior do disco $|z| > 1$, que é conexo mas não é limitado nem simplesmente conexo (veja teorema na apostila).

Queremos mostrar que a função $|p(z)/z^n|$ tem módulo menor que ou igual a 1 em D. Primeiro veja que $|p(z)| \leq 1$ na fronteira de D, isto é, em $|z| = 1$, logo $|p(z)/z^n| \leq 1$ também.

Precisamos analisar o quociente quando $z \to \infty$, esse comportamento é determinado por a_n, pois

$$\lim_{z \to \infty} \frac{p(z)}{z^n} = a_n.$$

Usando a estimativa de Cauchy em p no disco de raio 1, obtemos

$$|p^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!1}{1^n} = n!$$

mas como p é polinômio, essa derivada é simplesmente $n!a_n$. Portanto

$$|n!a_n| \leq n! \quad \Rightarrow |a_n| \leq 1.$$

Agora a função $|p(z)/z^n|$, definida no anel $1 < |z| < \infty$ é limitada por 1 em toda a fronteira. Vamos usar essa limitação para construir um máximo local se a função não for limitada por 1 em todo D.

Suponha que $|p(w)/w^n| = 1+\delta > 1$ para algum $w \in D$ fixado e algum $\delta > 0$. Como $\lim_{z\to\infty} \left|\frac{p(z)}{z^n}\right| \leq 1$, sabemos que existe $R > 0$ tal que $|z| > R$ implica $|p(z)/z^n| < 1 + \delta/2 < 1 + \delta$. Assim o conjunto

$$F = \{z \in \mathbb{C}; \quad |p(z)/z^n| \geq 1 + \delta/2\}$$

é limitado: ele está contido no disco de centro 0 e raio R.

Como $|p(z)/z^n|$ é contínua em D, o conjunto F é limitado e *fechado*, a função atinge um valor máximo dentro de F. Seja z_0 o ponto onde a função assume esse valor máximo.

O ponto z_0 não pode estar na fronteira $|z_0| = 1$, pois lá o quociente é menor que ou igual a 1. Logo $1 < |z_0| < R$, e existe $\rho > 0$ tal que o disco $|z - z_0| < \rho$ está contido em D.

Essa é a vizinhança que nos interessa: como fora de F a função está abaixo do valor em z_0, em todo o disco $|z - z_0| < \rho$ a função também está abaixo. Logo temos a desigualdade $|p(z_0)/z_0^n| \geq |p(z)/z^n|$ em uma vizinhança contida em D.

Do princípio do módulo máximo, deduzimos que $p(z)/z^n$ é constante em D. Mas como o limite no infinito é a_n, essa constante é exatamente a_n: $p(z)/z^n \equiv a_n$, logo $|p(z)/z^n| = |a_n| = 1$, uma contradição.

Esse exercício não é simples.

Exercício 5.

(1) Estimativa de Cauchy,
$$|f''(z)| \leq \frac{n!M}{r^2},$$
onde M é o máximo de f em $|z - w| = r$. No nosso caso, $|w| = |w - z + z| \leq |z| + r$, logo $|f(w)| \leq A + B|w|^{3/2} \leq A + B(|z| + r)^{3/2}$, daí
$$|f''(z)| \leq n!\frac{A + B(|z| + r)^{3/2}}{r^2}.$$
Fazendo $r \to \infty$ e mantendo z constante, vemos que
$$|f''(z)| \leq n! \lim_{r\to\infty} \frac{A + B(|z|/r + 1)^{3/2}}{r^{1/2}} = 0.$$
Como z é qualquer, $f'' \equiv 0$ e f é um polinômio de grau 1.

(2) $g(z) = f'(z)$ para simplificar a notação, temos $|g(z)| \leq |z|$ e g inteira. Estimativa de Cauchy para $g''(w)$:
$$|g''(w)| \leq \frac{2!M}{r^2},$$
onde M é o máximo de g no disco $|w - z| = r$. Como acima, $|z| = |z - w + w| \leq r + |w|$, logo $|g(z)| \leq |z| \leq r + |w|$, e
$$|g''(w)| \leq \frac{2!(r + |w|)}{r^2} \to 0, \quad r \to \infty.$$
Portanto $g'' \equiv 0$ e g é polinômio de grau 1.

Além disso, $|g(0)| \leq |0|$, logo $g(0) = f'(0) = 0$. Assim f é polinômio de grau 2 com derivada no zero nula: $f(z) = a + bz^2$. Por fim a estimativa de Cauchy em $g'(0)$ garante que $|b| < 1/2$.

Exercício 6. Princípio do módulo máximo, veja exercício 4.

Exercício 7. Use estimativa de Cauchy para as derivadas de ordem mais alta $f^{(n+k)}(z)$ para $k \geq 0$, veja exercício 5.

Exercício 8. Primeiro mostre que $f'' \equiv 0$ usando a estimativa de Cauchy, veja exercício 5.

Depois com $f(z) = az + b$ calcule

$$\lim_{z\to\infty} \frac{|az + b|}{|z|} = |a|,$$

e conclua que $a = 0$.

Exercício 9. $**$