MAT46 - Funções de Variável Complexa - Lista 3

Resposta Exercícios Selecionados

Principais resultados usados

Definição 1

$f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é analítica em z se f for diferenciável em $z \in D$ e em uma vizinhança de z.

Teorema 1: Equações de Cauchy Riemann

Se $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é diferenciável (derivável) no ponto $z_0 = x_0 + iy_0$, então valem as ECR no ponto (x_0, y_0)

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \quad \text{e} \quad u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0).$$

Teorema 2 - Recíproca do Teorema 1

Se $u(x, y)$ e $v(x, y)$ são de classe C^1 em um ponto (x_0, y_0) (isto é, u, v e todas as derivadas parciais de 1ª ordem são contínuas em (x_0, y_0)), e se as derivadas parciais de 1ª ordem satisfazem as ECR nesse ponto, então $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ é diferenciável em $z_0 = x_0 + iy_0$. Neste caso, temos

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0).$$

Teorema 2 - Recíproca do Teorema 1 - Critério de Analiticidade para um Domínio D

Se $u(x, y)$ e $v(x, y)$ são de classe C^1 em um domínio D (isto é, u, v e todas as derivadas parciais de 1ª ordem são contínuas em D), e se as derivadas parciais de 1ª ordem satisfazem as ECR em todo D, então $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ é analítica em D. Neste caso, temos

$$f'(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y).$$

Regra de L'Hôpital

Sejam $f, g : D \to \mathbb{C}$ deriváveis em $z_0 \in D$. Se $f(z_0) = g(z_0) = 0$ e $g'(z_0) \neq 0$, então

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Observação: Se f, g e suas $n - 1$ derivadas forem nulas em z_0 e $g^{(n)}(z_0) \neq 0$, então

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{g^{(n)}(z_0)}.$$

Resposta Exercícios Selecionados

Exercício 2.1 Escrevemos $f(z) = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} + i0$, sendo $u(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $v(x, y) = 0$.

Se f é diferenciável em $z = x + iy$, então valem as Equações de Cauchy-Riemann (ECR):

$$u_x = v_y \quad \text{e} \quad u_y = -v_x.$$

Como v é nula, as ECR se tornam

$$u_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 \quad \text{e} \quad u_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Porém, não existem soluções em $\mathbb{R}^2$ para as equações acima (note que u_x e u_y nem estão definidas em $(0, 0)$).

Portanto, f não é diferenciável em qualquer ponto de $\mathbb{C}$, tampouco será analítica (veja Teorema 1 e Definição 1).

Exercício 3.1 As funções $f(z) = z^{10} + 1$ e $g(z) = z^6 + 1$ satisfazem as hipóteses da regra de L'Hôpital. Logo,

$$\lim_{z \to i} \frac{z^{10} + 1}{z^6 + 1} = \frac{10i^9}{6i^5} = \frac{10}{6}.$$

Exercício 3.2 As funções $f(z) = \sin z$ e $g(z) = e^z - 1$ satisfazem as hipóteses da regra de L'Hôpital. Logo,

$$\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{e^z - 1} = \frac{\cos(0)}{1} = 1.$$

Exercício 3.3 As funções $f(z) = \sin z - z$ e $g(z) = z^2$ satisfazem as hipóteses da regra gerais de L'Hôpital. Logo,

$$\lim_{z \to 0} \frac{\sin z - z}{z^2} = \frac{f''(0)}{g''(0)} = 0.$$

Exercício 5 Se $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, então $\overline{f}(z) = u(x, y) + iw(x, y)$, sendo $w(x, y) = -v(x, y)$. Como f e $\overline{f}$ são analíticas em $\mathbb{C}$, valem as Equações de Cauchy-Riemann para f e $\overline{f}$, ou seja:

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x \qquad \text{e} \qquad u_x = w_y = -v_y, \quad u_y = -w_x = v_x.$$

Logo, $u_x = u_y = 0 \ \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ (uma vez que $u_x = -u_x$ e $u_y = -u_y \ \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$) e, portanto, u é uma função constante.

Analogamente, $v_x = v_y = 0 \ \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ e, portanto, v também é constante. Concluímos que f é constante.

Exercício 6 Um exemplo clássico de funções complexas inteiras, isto é, analíticas em todo $\mathbb{C}$, são as funções polinomiais da forma $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots a_n z^n, \quad a_j \in \mathbb{C}$.

Vamos procurar um exemplo dentro dessa classe de funções. Observe que

$$f(\overline{z}) = f(z) = a_0 + a_1\overline{z} + a_2\overline{z}^2 + \ldots a_n\overline{z}^n \quad \text{e} \quad \overline{f(z)} = \overline{a}_0 + \overline{a}_1\overline{z} + \overline{a}_2\overline{z}^2 + \ldots \overline{a}_n\overline{z}^n.$$

Assim, $\overline{f(z)} = f(\overline{z})$ quando os coeficientes de f são reais. Portanto, basta escolher funções com, pelo menos, um coeficiente não real.
Exemplos: $f(z) = i + iz$, $f(z) = 2 + iz$, $f(z) = 3iz$, $f(z) = (1+i)z + iz^2$, $f(z) = 1 + 2z + iz^2$ etc.

Exercício 7.2 Primeiro, note que o domínio de f é $D_f = \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Como $g(z) = z$ é analítica em todo $\mathbb{C}$, segue que a analiticidade de f pode falhar por causa da função $h(z) = \dfrac{1}{z}$. Temos

$$h(z) = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2} = u(x,y) + iv_(x,y), \quad z = x + iy.$$

Observe que as funções reais u e v são contínuas, exceto em $(0,0)$ (ou seja, $z = 0$). Além disso,

$$u_x = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad u_y = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

e

$$v_x = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \quad v_y = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

são contínuas, exceto em $(0,0)$ (ou seja, $z = 0$), e a ainda satisfazem as ECR. Portanto, h é analítica em $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ (Veja Teorema 2), sendo

$$h'(z) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} + i\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2 + i2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-\overline{z}^2}{z^2\overline{z}^2} = -\frac{1}{z^2}.$$

Portanto, f é analítica em $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ (também é chamada de *holomorfa* por ser analítica em todo o seu domínio), sendo $f'(z) = g'(z) + h'(z) = 1 - \dfrac{1}{z^2}$. A função f não é inteira pois não é analítica em todo $\mathbb{C}$.

Exercício 9.1 Falso. Use o Teorema 1 como foi usado no Exercício 2.1.

Exercício 9.2 Verdadeiro. Use o Teorema 1 como foi usado no Exercício 2.1.

Exercício 9.3 Verdadeiro. Adapte o Teorema 2 para um ponto (x_0, y_0) e verifique que f é diferenciável apenas no eixo x. Conclua que $f'(z) = 2x$ no eixo x.

Exercício 9.4 Verdadeiro.

Exercício 9.5 Verdadeiro.

Exercício 9.6 Verdadeiro.

Exercício 9.7 Falso.