Funções de Variável Complexa

Semana 15

Sumário

10.4 Quando entra uma função trigonométrica

Sejam $p,\ q$ polinômios, onde q não tem raiz real e

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m},$$

vamos resolver integrais do tipo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(A\sin(ax) + B\cos(bx))\, dx.$$

Elas costumam aparecer no cálculo de Fourier.

Exemplo

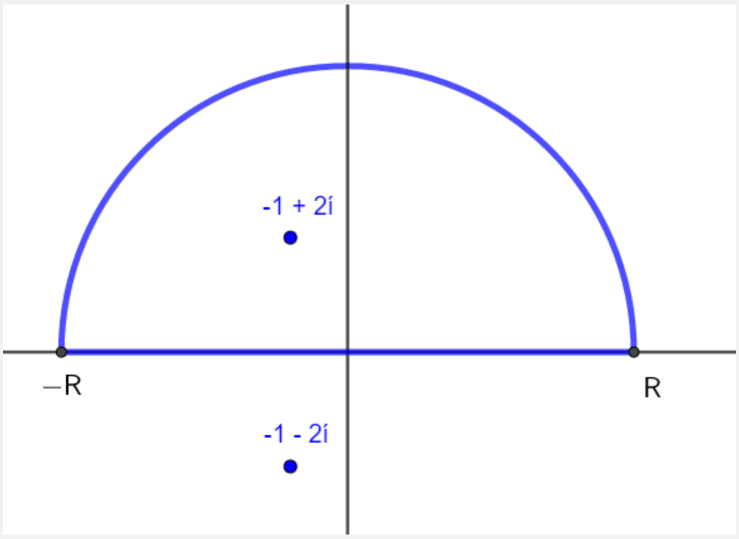
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin(\pi x)}{x^2+2x+5}\, dx.$$

1. Escrever a integral real como integral de contorno

O primeiro passo é recobrar que essa integral é imprópria, assim é um limite:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin(\pi x)}{x^2+2x+5}\, dx = \lim_{R\to\infty}\lim_{T\to-\infty}\int_T^R \frac{x\sin(\pi x)}{x^2+2x+5}\, dx.$$

As integrais dentro do limite são integrais finitas, vamos usar elas pra construir um contorno. A escolha boa nesses casos ainda é a fronteira do semidisco superior de raio R, denotado Γ_R:



Definindo a função *complexa* $g(z) = \frac{z\exp(i\pi z)}{z^2+2z+5}$, podemos escrever a integral da função no contorno como soma de duas partes, sobre o segmento e sobre o arco de circunferência:

$$\int_{\Gamma_R} g(z)\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{x\exp(i\pi x)}{x^2+2x+5}\,dx + \int_{arco} g(z)\,dz,$$

note que no segmento $[-R, R]$ a função fica

$$\int_{-R}^{R} \frac{x\exp(i\pi x)}{x^2+2x+5}\,dx = \int_{-R}^{R} \frac{x\,(\cos(\pi x) + i\sin(\pi x))}{x^2+2x+5}\,dx$$

$$= \int_{-R}^{R} \frac{x\cos(\pi x)}{x^2+2x+5}\,dx + i\int_{-R}^{R} \frac{x\sin(\pi x)}{x^2+2x+5}\,dx$$

assim queremos a parte **imaginária** do resultado.

Por fim pra reconstruir nossa expressão original, tomamos limite:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{x\sin(\pi x)}{x^2+2x+5}\,dx = Im\left[\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} g(z)\,dz - \lim_{R\to\infty} \int_{arco} g(z)\,dz\right],$$

essa igualdade será verdadeira se mostrarmos que cada limite na direita existe (é finito).

2. Calcular a integral de contorno por resíduos

A função g tem 2 pólos, $-1 \pm 2i$, cada um de ordem 1 – pólos simples!!

Apenas o pólo $-1+2i$ está dentro do contorno (para $R > \sqrt{5}$), assim pelo teorema dos resíduos:

$$\int_{\Gamma_R} g(z)\,dz = 2\pi i Res(g, -1+2i).$$

Prof. Vanderley Ferreira - 2021

Como calculamos o resíduo em um pólo simples?

$$Res(g,i) = \lim_{z\to -1+2i}((z+1-2i)g(z)) = \lim_{z\to -1+2i}\left(\frac{z\exp(i\pi z)}{z+1+2i}\right) = -e^{-2\pi}\left(\frac{1}{2}+\frac{i}{4}\right).$$

Segue portanto que a integral vale $e^{-2\pi}\pi(1-2i)/2$, e como o resultado na direita não depende de R, podemos tomar o limite:

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R} g(z)\,dz = e^{-2\pi}\pi\frac{1-2i}{2}.$$

3. Remover as partes do contorno que não importam obtendo o valor da integral original

Vamos mostrar que o limite que falta é nulo.

Escrevendo a integral pela definição,

$$\int_{arco} g(z)dz = \int_0^\pi g(R\exp(it))Ri\exp(it)dt = iR\int_0^\pi g(R\exp(it))\exp(it)dt.$$

Estimando o módulo da integral acima, temos

$$\left|\int_{arco} g(z)dz\right| = R\left|\int_0^\pi g(R\exp(it))\exp(it)dt\right| \leq R\int_0^\pi |g(R\exp(it))|dt,$$

onde usamos $|\exp(it)| = 1$.

Estimando a nossa função g,

$$|g(z)| = \left|\frac{z}{z^2+2z+5}\right||\exp(i\pi z)| = \left|\frac{z}{z^2+2z+5}\right|e^{-Im(z)},$$

substituindo agora $z = R\exp(it)$, temos $Im(z) = -R\sin t$ e

$$|g(R\exp(it))| = \left|\frac{R\exp(it)}{R^2\exp(2it)+2R\exp(it)+5}\right|e^{-R\sin t}.$$

Para a parte racional da função, fatorando $|z|$ na maior potência possível nos termos da fração, vem

$$\frac{|z|}{|z^2+2z+5|} = \frac{|z|}{|z|^2\left|1+\frac{2}{|z|}+\frac{5}{|z|^2}\right|},$$

essa técnica é comum no cálculo de limites no infinito no cálculo. Agora conhecemos o limite

$$\left|1+\frac{2}{|z|}+\frac{5}{|z|^2}\right| \to 1$$

quando $|z|\to\infty$, logo sabemos que

$$\left|1+\frac{2}{|z|}+\frac{5}{|z|^2}\right| \geq \frac{1}{2}, \quad R\ grande.$$

Prof. Vanderley Ferreira - 2021

Como o termo acima aparece no denominador da função, a desigualdade se inverte:

$$\left|\frac{z}{z^2+2z+5}\right| \leq \frac{2}{|z|}, \quad R \; grande.$$

Substituindo na desigualdade acima $z = R\exp(it)$, temos

$$\left|\frac{R\exp(it)}{R^2\exp(2it)+2R\exp(it)+5}\right| \leq \frac{2}{R}, \quad R \; grande.$$

Retornando na nossa integral principal,

$$\left|\int_{arco} g(z)dz\right| \leq R\int_0^{\pi}\left|\frac{R\exp(it)}{R^2\exp(2it)+2R\exp(it)+5}\right| e^{-R\sin t}dt$$

$$\leq R\frac{2}{R}\int_0^{\pi} e^{-R\sin t}dt = 2\int_0^{\pi} e^{-R\sin t}dt, \quad R \; grande.$$

A conclusão vem do limite

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi} e^{-R\sin t}dt = 0,$$

que vocês podem usar direto.

Portanto

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{x\sin(\pi x)}{x^2+2x+5}\,dx = Im\left[\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R} g(z)\,dz - \lim_{R\to\infty}\int_{arco} g(z)\,dz\right]$$

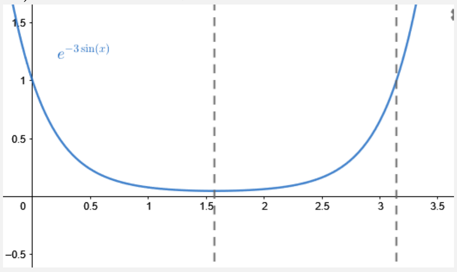
$$= Im\left[e^{-2\pi}\pi\frac{1-2i}{2}\right] = -\pi e^{-2\pi},$$

Aqui a função não é par. Sem essa hipótese é preciso verificar a convergência (a integral converge nesse caso, fica como exercício verificar).

Novamente, o limite calculado é o Valor Principal da integral.

Justificando o limite

Primeiro observe que a função $-R\sin t$ é simétrica com relação a $-\pi/2$, e consequentemente $\exp(-R\sin t)$ também é,



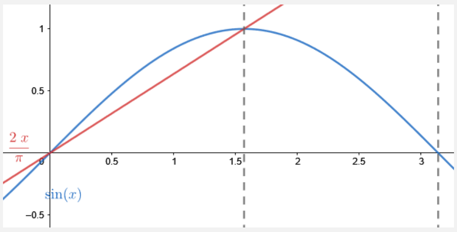
logo

$$\int_0^{\pi} e^{-R\sin t}dt = 2\int_0^{\pi/2} e^{-R\sin t}dt.$$

Em seguida, usando a desigualdade geométrica

$$\sin t \geq \frac{2t}{\pi}, \quad 0 < t < \pi/2,$$

ilustrada em



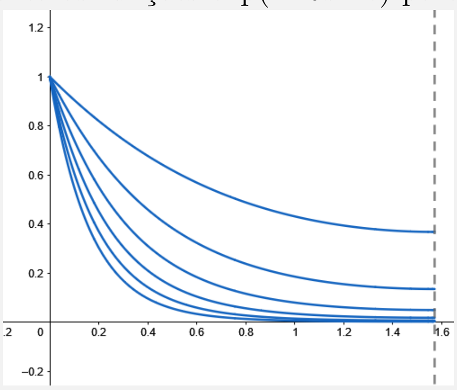
concluímos que $e^{-R\sin t} \leq e^{-R2t/\pi}$ e calculamos a integral restante:

$$\int_0^{\pi/2} e^{-R\sin t}dt \leq \int_0^{\pi/2} e^{-2Rt/\pi}dt = -\frac{\pi}{2R}\left(e^{-R} - e^0\right) \leq \frac{\pi}{2R}.$$

Portanto

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi} e^{-R\sin t}dt = \lim_{R\to\infty} 2\int_0^{\pi/2} e^{-R\sin t}dt \leq \lim_{R\to\infty} 2\frac{\pi}{2R} = 0.$$

O gráfico a seguir apresenta as funções $\exp(-R\sin t)$ para $R \in \{1, ..., 6\}$.



Atenção: a justificativa usada no trecho abaixo está errada. Veja a versão corrigida acima.

A técnica é a mesma, usar a desigualdade ML no semicírculo. O comprimento ainda é πR, precisamos estimar g:

$$|g(z)| = \left|\frac{z}{z^2+2z+5}\right| |\exp(i\pi z)| = \left|\frac{z}{z^2+2z+5}\right| e^{-R},$$

pois $|\exp(iz)| = |\exp(-y+ix)| = e^{-y}$, e o maior valor possível para y no contorno é R.

Para a parte racional da função, fatorando $|z|$ na maior potência possível nos termos da fração, vem

$$\frac{|z|}{|z^2+2z+5|} = \frac{|z|}{|z|^2\left|1+\frac{2}{|z|}+\frac{5}{|z|^2}\right|},$$

essa técnica é comum no cálculo de limites no infinito no cálculo. Agora conhecemos o limite

$$\left|1+\frac{2}{|z|}+\frac{5}{|z|^2}\right| \to 1$$

quando $|z| \to \infty$, logo sabemos que

$$\left|1+\frac{2}{|z|}+\frac{5}{|z|^2}\right| \geq \frac{1}{2}, \quad R \; grande.$$

Como o termo acima aparece no denominador da função, a desigualdade se inverte:

$$|g(z)| \leq \frac{2}{|z|}, \quad R \; grande.$$

Da desigualdade ML,

$$\left|\int_{arco} g(z)\,dz\right| \leq \frac{2}{R}e^{-R}\pi R = 2\pi e^{-R}.$$

Segue

$$\lim_{R\to\infty}\int_{arco} g(z)\,dz = 0.$$

Prof. Vanderley Ferreira - 2021

Para quem está se perguntando se não poderia pegar direto seno na função original: a função seno é limitada na direção do eixo x, no entanto ela cresce exponencialmente na direção do eixo y. Assim no arco de circunferência estaríamos integrando uma função que está crescendo, e a integral dessa parte não iria pra zero, como é conveniente.

10.5 Quando entra uma função multivalorada

É preciso tomar cuidado extra ao lidar com funções multivaloradas. Precisamos escolher os ramos com cuidado de modo que a função seja analítica sobre e no interior da curva que interessa, exceto possivelmente em **pólos**: ou seja, pontos de ramificação precisam ser evitados.

Lembre que todo o cálculo de resíduos é baseado em singularidades isoladas.

Exemplo

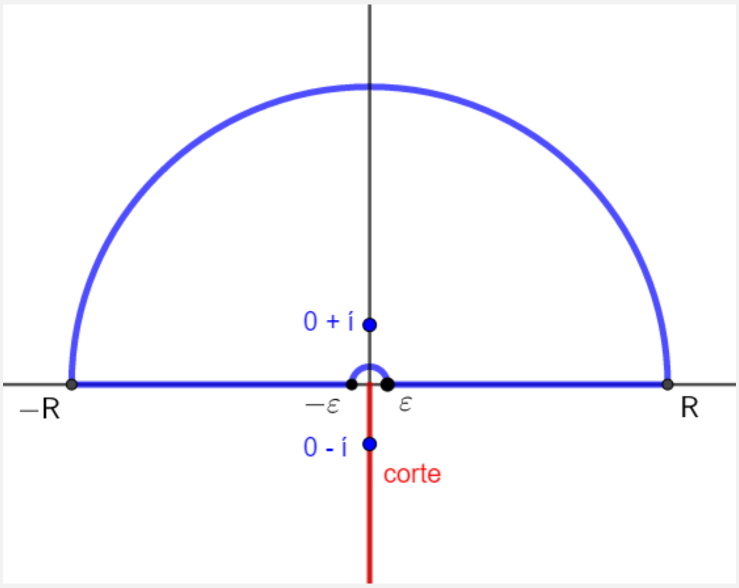
$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(x^2+1)^2}\, dx.$$

1. Escrever a integral real como integral de contorno

O primeiro passo é recobrar que essa integral é imprópria, assim é um limite:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(x^2+1)^2}\, dx = \lim_{R\to\infty} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^R \frac{\ln x}{(x^2+1)^2}\, dx.$$

As integrais dentro do limite são integrais finitas, vamos usar elas pra construir um contorno. A escolha boa nesses casos ainda é a fronteira do semidisco superior de raio R, denotado Γ, mas dessa vez vamos driblar o ponto de ramificação em $z=0$ usando uma pequena semicircunferência de raio ε:



Definindo a função *complexa* $g(z) = \frac{log^*(z)}{(z^2+1)^2}$, podemos escrever a integral da função no contorno como soma de **quatro** partes, sobre os segmentos e sobre os arcos de circunferência:

$$\int_\Gamma g(z)\,dz = \int_\varepsilon^R g(z)\,dz + \int_{arco(R)} g(z)\,dz + \int_{-R}^{-\varepsilon} g(z)\,dz - \int_{arco(\varepsilon)} g(z)\,dz,$$

a integral na circunferência pequena fica negativa por orientação. No segmento $[\varepsilon, R]$ a função fica

$$\int_\varepsilon^R g(z)\,dz = \int_\varepsilon^R \frac{x \ln x)}{(x^2+1)^2}\,dx,$$

para atender o segmento $[-R, -\varepsilon]$ precisamos escolher o ramo da função log. Tomando log^* como o ramo excluindo-se o eixo imaginário negativo, a função é analítica na área que precisamos, e para $z = x + 0i, x < 0$ segue que $log^*(x) = ln|x| + i\pi$, que dá a integral

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} g(z)\,dz = \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{x(\ln|x| + i\pi))}{(x^2+1)^2}\,dx,$$

a primeira integral é igual à que nos interessa (via mudança de variável), já a outra é um número imaginário puro: vamos então tomar a parte **real** dessa vez.

Por fim pra reconstruir nossa expressão original, tomamos limite:

$$2\lim_{R\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^R \frac{\ln x}{(x^2+1)^2}\,dx$$

$$= Re\left[\lim_{R\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Gamma g(z)\,dz - \lim_{R\to\infty}\int_{arco(R)} g(z)\,dz - \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{arco(\varepsilon)} g(z)\,dz\right],$$

essa igualdade será verdadeira se mostrarmos que cada limite na direita existe (é finito).

2. Calcular a integral de contorno por resíduos

A função g tem 2 pólos, $\pm i$, cada um de ordem 2 – pólos duplos.

Apenas o pólo i está dentro do contorno (para $R > 1$), assim pelo teorema dos resíduos:

$$\int_{\Gamma_R} g(z)\, dz = 2\pi i Res(g, i).$$

Como calculamos o resíduo em um pólo duplo?

$$Res(g,i) = \lim_{z\to i}\left(\frac{d}{dz}(z-i)^2 g(z)\right) = \lim_{z\to i}\left(\frac{d}{dz}\frac{log^*(z)}{(z+i)^2}\right)$$

$$= \lim_{z\to i}\left[\frac{1}{z(z+i)^2} - 2\frac{log^*(z)}{(z+i)^3}\right] = \frac{i}{4} + \frac{\pi}{4}.$$

Segue portanto que a integral vale $-\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi^2}{4}$, e como o resultado na direita não depende de R, podemos tomar o limite:

$$\lim_{R\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma} g(z)\, dz = -\frac{\pi}{2} + \frac{i\pi^2}{4}.$$

3. Remover as partes do contorno que não importam obtendo o valor da integral original

Vamos mostrar que os dois limites que faltam vão pra zero.

No arco de circunferência maior vamos aplicar a técnica anterior (estimar via desigualdade ML).

Depois vamos mostrar que a integral na circunferência pequena vai pra zero.

Fatorando $|z|$ na maior potência possível nos termos da fração e calculando a norma de $log^*(z) = ln|z| + i\theta$, vem

$$\frac{|ln|z| + i\theta|}{|z^2+1|^2} = \frac{\sqrt{ln|z|^2 + \theta^2}}{|z|^4\left|1 + \frac{1}{|z|^2}\right|^2},$$

essa técnica é comum no cálculo de limites no infinito no cálculo. Agora conhecemos o limite

$$\left|1 + \frac{1}{|z|^2}\right|^2 \to 1$$

quando $|z| \to \infty$, logo sabemos que

$$\left|1 + \frac{2}{|z|} + \frac{5}{|z|^2}\right| \geq \frac{1}{2}, \quad R\ grande.$$

Prof. Vanderley Ferreira - 2021

Para o log vamos usar a estimativa $lnR < R$ válida pra R positivo, e $\theta < R$ válida para $R > 2\pi$, pra estimar

$$\sqrt{ln|z|^2 + \theta^2} \leq \sqrt{R^2 + R^2} = R\sqrt{2},$$

Juntando tudo, temos

$$|g(z)| \leq \frac{2\sqrt{2}}{|z|^3}, \quad R \; grande.$$

Segue

$$\lim_{R\to\infty} \int_{arco(R)} g(z)\, dz = 0.$$

Vamos mostrar que a integral na circunferência pequena tende a zero. Agora a ideia é usar a mesma estimativa inicial, mas pra $|z|$ próximo de zero. Temos:

$$\frac{|ln|z| + i\theta|}{|z^2+1|^2} \leq \frac{2\sqrt{ln|z|^2}}{|z|^4 \left|1 + \frac{1}{|z|^2}\right|^2} \leq \frac{4|ln|z||}{1},$$

usando que para ε pequeno $ln|z|$ se torna grande em módulo e portanto é maior que θ, enquanto $1 + z^2$ tende a 1, e portanto tem módulo maior que $\frac{1}{2}$.

Usando nossa desigualdade favorita, segue

$$\left| \int_{arco(\varepsilon)} g(z) dz \right| \leq comprimento(arco) \times maximo(g) \leq \pi\varepsilon 4|ln\varepsilon|,$$

e do conhecido limite $u\, lnu \to 0$ quando $u \to 0^+$, segue a afirmação.

Portanto

$$\lim_{R\to\infty} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\ln x)}{(x^2+1)^2}\, dx = \frac{1}{2} Re \left[\lim_{R\to\infty} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Gamma} g(z)\, dz - \lim_{R\to\infty} \int_{arco(R)} g(z)\, dz \right.$$

$$\left. - \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{arco(\varepsilon)} g(z)\, dz \right] = \frac{1}{2} Re \left[-\frac{\pi}{2} + \frac{i\pi^2}{4} \right] = -\frac{\pi}{4}.$$

Aqui tomamos o limite independente no zero e no infinito, assim a integral calculada é o valor real, não apenas o Valor Principal da integral.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(x^2+1)^2}\, dx = -\frac{\pi}{4}.$$

Prof. Vanderley Ferreira - 2021

10.6 Integrando funções trigonométricas sobre o período

Exemplo

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{5 + 4\cos t}\, dt.$$

1. Escrever a integral real como integral de contorno

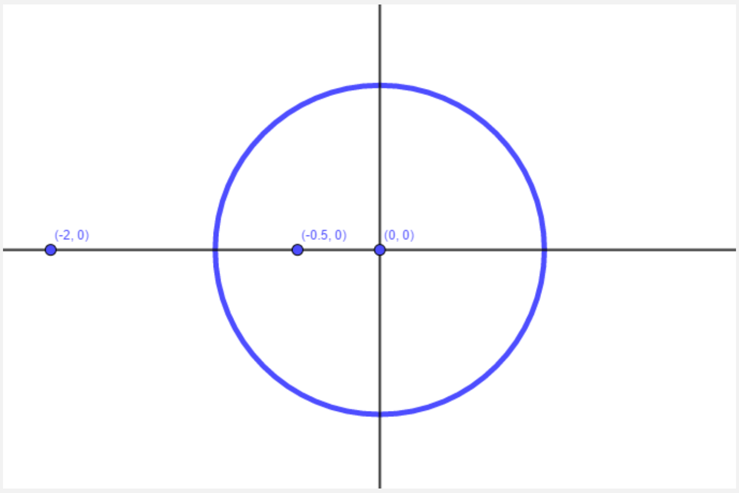
O primeiro passo é interpretar essa integral como uma integral de contorno sobre o círculo unitário. Para as contas fecharem, observe que o intervalo de integração cobre uma vez o círculo $z(t) = \exp(it)$, que é uma curva fechada. Escrevendo então $z(t) = \exp(it)$ como mudança de variável, segue que $z'(t) = i\exp(it) = iz$, resta substituir os senos e cossenos. Lembrando a forma exponencial de sin e cos, temos

$$\sin(t) = \frac{\exp(it) - \exp(-it)}{2i} = \frac{z - 1/z}{2i}, \qquad \cos(t) = \frac{\exp(it) + \exp(-it)}{2} = \frac{z + 1/z}{2}$$

Juntando tudo nossa integral fica

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{5 + 4\cos t}\, dt = \int_{|z|=1} \frac{\left(\frac{z-1/z}{2i}\right)^2}{5 + 4\frac{z+1/z}{2}} \frac{dz}{iz}.$$

A integral na direita é a integral sobre a circunferência unitária de uma função racional. Nesse caso não temos limite a calcular na integral, não é uma integral imprópria.



Definindo a função *complexa*

$$g(z) = \frac{i(z^2-1)^2}{4z^2(2z^2+5z+2)},$$

que é a expressão dentro da última integral organizada, estamos prontos pra calcular a integral.

2. Calcular a integral de contorno por resíduos

A função g tem pólos, $-2, -1/2$ de ordem 1, e 0 de ordem 2.

Apenas os pólos 0 e $-1/2$ estão dentro do contorno, assim pelo teorema dos resíduos:

$$\int_{|z|=1} g(z)\, dz = 2\pi i Res(g,0) + 2\pi i Res(g, -\frac{1}{2}).$$

Após algumas (várias) contas, obtemos $Res(g,0) = -i\frac{5}{16}$ e $Res(g, -\frac{1}{2}) = \frac{3}{16}$, substituindo de volta sai

$$\int_{|z|=1} g(z)\, dz = \frac{\pi}{4}.$$

3. Remover as partes do contorno que não importam obtendo o valor da integral original

Nesse caso, não tem nenhum termo sobrando:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{5+4\cos t}\, dt = \int_{|z|=1} g(z)\, dz = \frac{\pi}{4}.$$

Essa integral não é imprópria. Não tem convergência pra verificar.