Funções de Variável Complexa

Sumário

8 Integração

8.1 Integral de funções complexas

O objetivo dessa seção é estudar as perguntas

O que é a integral de uma função complexa?

Vale uma versão complexa do teorema fundamental do cálculo?

Queremos definir a integral de uma função complexa de uma variável complexa, vamos nos apoiar na integral de Riemann já conhecida.
Se $\psi : [a,b] \to \mathbb{C}$ é contínua, podemos tomar a integral de cada componente, isto é, se $\psi(t) = x(t) + iv(t)$, então x, y são também funções contínuas. Definimos a integral da curva ψ integrando cada componente:

$$\int_a^b \psi(t)\, dt = \int_a^b x(t) + iy(t)\, dt = \int_a^b x(t)\, dt + i \int_a^b y(t)\, dt.$$

Prof. Vanderley Ferreira - 2021

Quando $\Psi(t) = X(t) + iY(t)$ satisfaz $\Psi'(t) = \psi(t)$ para $a < t < b$, isto é, ψ é a derivada de Ψ, podemos aplicar o teorema fundamental do cálculo a cada componente, obtendo

$$\int_a^b \psi(t)\,dt = \int_a^b x(t)\,dt + i\int_a^b y(t)\,dt = \int_a^b X'(t)\,dt + i\int_a^b Y'(t)\,dt =$$

$$= X(b) - X(a) + i(Y(b) - Y(a)) = \Psi(b) - \Psi(a).$$

Você pode pensar em ψ como a velocidade, a integral sobre $[a, b]$ fornece o deslocamento total sobre a curva Ψ.

Diferente da integral real, podemos integrar funções complexas sobre diferentes caminhos ligando dois pontos. Vamos nos atentar a essa diferença em vários pontos, o primeiro é que precisamos de hipóteses sobre o tipo de curva usado.

Definição

Um caminho no aberto $D \subset \mathbb{C}$ é uma curva parametrizada $\gamma : [a, b] \to D$ continuamente diferenciável por partes, isto é, uma curva contínua em $[a, b]$ para a qual existem finitos pontos x_1, ..., $x_N \in [a, b]$ tais que $x_1 = a$, $x_N = b$ e γ é contínua em $[x_k, x_{k+1}]$ e tem derivada contínua em (x_k, x_{k+1}).
Dizemos que $\gamma(a)$ é o ponto inicial e $\gamma(b)$ é o ponto final do caminho. Dizemos também que γ liga $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$.

Isto é, um caminho γ tem derivada contínua, exceto em um número finito de pontos.

Na prática, a maior parte das curvas que usaremos serão compostas por segmentos de retas e arcos de circunferência.

A vantagem de usar caminhos é que

$$\int_a^b \gamma(t)\,dt = \int_{x_1}^{x_2} \gamma(t)\,dt + \int_{x_2}^{x_3} \gamma(t)\,dt + \cdots + \int_{x_{N-1}}^{x_N} \gamma(t)\,dt,$$

e em cada intervalo a função sendo integrada é continuamente diferenciável.

Definição

Sejam $f : D \to \mathbb{C}$ contínua no aberto D e $\gamma : [a,b] \to D$ um caminho.

A integral de f sobre γ é

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt.$$

Observe que a integral de f sobre z não é apenas a integral vetorial de $f \circ \gamma$.

Vamos expandir a expressão da integral, como fizemos com a derivada.

Escrevendo $f = u + iv$ e $\gamma = p + iq$, a integral acima é expressa usando integrais reais como

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int_a^b (u+iv)(p'+iq')\,dt =$$

$$= \int_a^b (up' - vq') + i(vp' + uq')\,dt$$

$$= \left(\int_a^b (u(p(t),q(t))p'(t) - v(p(t),q(t))q'(t))\,dt\right) +$$

$$+\, i\left(\int_a^b (v(p(t),q(t))p'(t) + u(p(t),q(t))q'(t))\,dt\right).$$

Cada integral na última expressão é uma integral de uma função real, assim é bem definida.

Prof. Vanderley Ferreira - 2021

Exemplo

Vamos integrar $f(z) = z^2$ no segmento ligando 0 e z_0. Podemos parametrizar o caminho como $\gamma(t) = tz_0 = tx_0 + tiy_0$ no intervalo $[0, 1]$, assim $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy$, $\gamma(t) = tx_0 + ity_0$ e $\gamma'(t) = x_0 + iy_0$.

Usando a expressão acima para a integral, temos

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b (up' - vq')\,dt + i\int_a^b (vp' + uq')\,dt$$

$$= \int_a^b ((tx_0)^2 - (ty_0)^2)x_0 - 2tx_0ty_0y_0)\,dt + i\int_a^b (2tx_0ty_0x_0 + ((tx_0)^2 - (ty_0)^2)y_0)\,dt$$

$$= (x_0^3 - y_0^2x_0 - 2x_0y_0^2)\int_a^b t^2\,dt + (2x_0^2y_0 + x_0^2y_0 - y_0^3)i\int_a^b t^2\,dt$$

$$= \frac{1}{3}(x_0^3 - y_0^2x_0 - 2x_0y_0^2 + (2x_0^2y_0 + x_0^2y_0 - y_0^3)i) = \frac{1}{3}z_0^3.$$

Exemplo

Vamos integrar $f(z) = z^2$ no segmento ligando 0 e z_0, desta vez usando a definição de integral.

Novamente o caminho é $\gamma(t) = tz_0 = tx_0 + tiy_0$ no intervalo $[0, 1]$. Temos a derivada $\gamma'(t) = z_0 = x_0 + iy_0$ que é não-nula para $z_0 \neq 0$. Calculamos a integral

$$\int_\gamma z^2\,dz = \int_0^1 [\gamma(t)]^2\gamma'(t)\,dt = \int_0^1 t^2z_0^2z_0\,dt = z_0^3\int_0^1 t^2\,dt = \frac{1}{3}z_0^3.$$

Exemplo

Vamos calcular a integral sobre um círculo centrado em $z = 0$ de $f(z) = 1/z$. Vamos parametrizar o círculo por $\gamma(t) = r\exp(it)$ no intervalo $[0, 2\pi]$.

Observe que a imagem de γ está contida no aberto $\{z \neq 0\}$ onde f é contínua, então a integral é bem definida e podemos calcular

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\, dt.$$

Como $\gamma'(t) = ir\exp(it) = i\gamma(t)$, temos

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} i\, dt = 2\pi\, i.$$

O exemplo acima é uma das integrais mais importantes que veremos.

Exemplo

Vamos discutir o valor da integral de $f(z) = z^n$ no círculo unitário para $n \in \mathbb{Z}$.

Como acima $\gamma(t) = r\exp(it)$ e

$$\int_\gamma z^n\, dz = \int_0^{2\pi} (\gamma(t))^n \gamma'(t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} r^n \exp(int) ir\exp(it)\, dt = r^{n+1} i \int_0^{2\pi} \exp(it(n+1))\, dt$$

$$= r^{n+1} i \left(\int_0^{2\pi} \cos(t(n+1))\, dt + i \int_0^{2\pi} \sin(t(n+1))\, dt \right).$$

Para $n \neq -1$ a função dentro de cada integral tem média zero no período, isto é,

$$\int_\gamma z^n\, dz = 0, \quad n \neq -1.$$

Operando com curvas

Será interessante considerar curvas formadas unindo curvas mais básicas.

Definimos a concatenação das duas curvas $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ e $\delta : [c, d] \to \mathbb{C}$, que cumprem $\gamma(b) = \delta(c)$, como a curva $\sigma : [0, 1] \to \mathbb{C}$, definida por

$$\sigma(t) = \begin{cases} \gamma(a + 2t(b-a)), & 0 \leq t \leq 1/2, \\ \delta(c + (2t-1)(d-c)), & 1/2 < t \leq 1, \end{cases}$$

isto é, percorremos a curva γ no intervalo $[0, 1/2]$ e então percorremos a curva δ no intervalo $[1/2, 1]$.

Vamos usar a concatenação pela propriedade

$$\int_\sigma f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz + \int_\delta f(z)dz.$$

Percorrendo uma curva parametrizada γ na orientação oposta, isto é, fazendo os valores do parâmetro percorrerem o intervalo na direção oposta, obtemos uma nova curva que denotaremos $-\gamma$.

A propriedade mais importante é que mudar a orientação muda o sinal da integral:

$$\int_{-\gamma} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz.$$

Na prática é mais trabalhoso escrever a concatenação na forma acima do que descrever "o caminho é o segmento de z_0 a z_1 unido ao segmento de z_1 a z_2" e com frequência o caminho será descrito da segunda forma.

Exemplo

Vamos considerar para $z \neq 0$ o caminho

$$\gamma_z(t) = \begin{cases} 1 + 2t(|z| - 1), & 0 \le t \le 1/2, \\ |z| \exp(iArg(z)(2t - 1)), & 1/2 \le t \le 1, \end{cases}$$

isto é, primeiro percorremos o segmento de reta ligando 1 e $|z|$ e em seguida percorremos o arco de circunferência ligando $|z|$ e z.

γ_z é um caminho: ele é contínuo, e o único ponto onde a derivada não é definida é $t = 1/2$. O ponto inicial é sempre 1.

Vamos calcular a integral de $1/z$ sobre γ_z:

$$\int_{\gamma_z} \frac{dw}{w} = \int_0^1 \frac{\gamma_z'(t)}{\gamma_z(t)} dt = \int_0^{1/2} \frac{\gamma_z'(t)}{\gamma_z(t)} dt + \int_{1/2}^1 \frac{\gamma_z'(t)}{\gamma_z(t)} dt.$$

Calculando a derivada, temos

$$\gamma_z'(t) = \begin{cases} 2|z| - 2, & 0 \le t < 1/2, \\ |z| Arg(z) 2i \exp(iArg(z)(2t - 1)), & 1/2 < t \le 1, \end{cases}$$

Voltando nas integrais, temos

$$\int_0^{1/2} \frac{\gamma_z'(t)}{\gamma_z(t)} dt + \int_{1/2}^1 \frac{\gamma_z'(t)}{\gamma_z(t)} dt = \int_0^{1/2} \frac{2|z| - 2}{1 + 2t(|z| - 1)} dt + \int_{1/2}^1 \frac{|z| Arg(z) 2i}{|z|} dt.$$

Como a primeira integral só envolve números reais, escolhendo $u = 1 + 2t(|z| - 1)$, vemos que $u' = 2(|z| - 1)$ e a integral fica

$$\int_0^{1/2} \frac{2|z| - 2}{1 + 2t(|z| - 1)} dt = \int_1^{|z|} \frac{du}{u} = \ln |z|.$$

Para a segunda integral, temos

$$\int_{1/2}^1 \frac{|z| Arg(z) 2i}{|z|} dt = 2iArg(z) \int_{1/2}^1 dt = iArg(z).$$

Portanto

$$\int_{\gamma_z} \frac{dw}{w} = \ln |z| + iArg(z) = Log(z).$$

Prof. Vanderley Ferreira - 2021

Exemplo

Gostaríamos de escrever, no exemplo acima,

$$\int_1^z \frac{dw}{w} = Log(z),$$

mas para isso precisamos garantir que a integral teria o mesmo valor se calculássemos usando outro caminho γ ligando 1 e z.

Infelizmente não é o caso:

Defina

$$\delta_z(t) = \begin{cases} 1 + 2t(|z| - 1), & 0 \leq t \leq 1/2, \\ |z| \exp(i(2\pi + Arg(z))(2t - 1)), & 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

isto é, primeiro percorremos o segmento de reta ligando 1 e $|z|$ e em seguida percorremos a circunferência de raio $|z|$, damos uma volta e paramos em z.

Podemos calcular a integral

$$\int_{\delta_z} \frac{dw}{w} = \int_0^{1/2} \frac{\delta_z'(t)}{\delta_z(t)} dt + \int_{1/2}^1 \frac{\delta_z'(t)}{\delta_z(t)} dt$$

$$= \int_0^{1/2} \frac{2|z| - 2}{1 + 2t(|z| - 1)} dt + \int_{1/2}^1 \frac{|z|(2\pi + Arg(z))2i}{|z|} dt$$

$$= \ln |z| + i(2\pi + Arg(z)) = Log(z) + 2\pi i.$$

O caminho δ_z usado percorre o eixo real até $|z|$ e então dá uma volta completa e segue até z. Mudando o número de voltas podemos produzir diferentes ramos do logaritmo.

Teorema

Teorema fundamental do cálculo.

Se $f : D \to \mathbb{C}$ é contínua, $F : D \to \mathbb{C}$ é holomorfa e $F'(z) = f(z)$, então para todo caminho $\gamma : [a, b] \to D$,

$$\int_\gamma f(z)\, dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Prof. Vanderley Ferreira - 2021

Usamos a versão vetorial do teorema fundamental:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

$$= \int_a^b [F \circ \gamma]'(t)dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Definição

Quando $F,\ f$ são contínuas em um aberto D e $F'(z) = f(z)$ em D dizemos que F é uma primitiva de f em D.

Exemplo

O ramo principal do logaritmo, Log, é contínuo e analítico no aberto

$$D = \mathbb{C} \backslash (-\infty, 0].$$

Para todo $z \in D$ vale

$$\int_1^z \frac{dz}{z} = Log(z),$$

pois quando tratamos apenas de caminhos em D não é mais possível dar voltas em torno da origem, como no exemplo anterior.

Em outras palavras, Log é uma primitiva de $1/z$ em D, mas não em $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.

Quando conhecemos uma primitiva da função, o cálculo da integral é muito mais direto.

Vamos analisar a questão da existência de uma primitiva, precisamos de mais algumas definições.

Seja $f : D \to \mathbb{C}$. Dizemos que a integral de f entre z_0 e z_1 não depende do caminho quando

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\delta f(z)dz,$$

sempre que γ e δ são caminhos em D que começam em z_0 e terminam em z_1.

Podemos escrever a igualdade acima como

$$\int_\gamma f(z)dz - \int_\delta f(z)dz = 0,$$

$$\int_\gamma f(z)dz + \int_{-\delta} f(z)dz = 0,$$

e finalmente usando a concatenação de γ e $-\delta$,

$$\int_\sigma f(z)dz = 0.$$

Observe que o caminho σ percorre γ no sentido positivo e δ no sentido negativo, começando e terminando em z_0 – é um caminho fechado.

Da mesma forma, se um caminho fechado começa me z_0 e passa por z_1 em algum t, podemos dividir a curva em dois caminhos de z_0 a z_1. Se a integral no caminho fechado é nula, a integral nos dois caminhos assim derivados são iguais.

O argumento acima sugere a importância de estudar integrais sobre caminhos fechados.

A integral de f em D não depende do caminho

$$\Updownarrow$$

a integral de f em todos os caminhos fechados em D é zero.

Prof. Vanderley Ferreira - 2021

Definição

Uma curva parametrizada $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ é simples quando

$$a \leq t < s \leq b, \qquad \gamma(t) = \gamma(s) \quad \Rightarrow \quad a = s,\ t = b.$$

Uma curva parametrizada $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ é fechada quando

$$\gamma(a) = \gamma(b).$$

Uma curva fechada é orientada positivamente quando ela é percorrida no sentido antihorário quando o parâmetro t varia de a a b.

Uma curva simples é uma curva que não tem autointerseções, exceto possivelmente nos extremos do intervalo (se for fechada).

Teorema

Se D é aberto e conexo, $f : D \to \mathbb{C}$ é contínua e satisfaz

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0,$$

para todo caminho fechado $\gamma : [a, b] \to D$, então f possui uma primitiva em D.

Reciprocamente, se $f,\ F : D \to \mathbb{C}$ são contínuas, D é conexo e F é primitiva de f em D, então a integral de f em todo caminho fechado em D é zero.

Exemplo

$$\int_\gamma \overline{z}\,dz$$

Considere inicialmente γ o segmento de reta unindo 0 e z_0, $\gamma(t) = tz_0$ e $\gamma'(t) = z_0$. Temos a integral

$$\int_\gamma \overline{z}\,dz = \int_0^1 \overline{\gamma(t)}\gamma'(t)\,dt = \int_0^1 t\overline{z_0}z_0\,dt = |z_0|^2 \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}|z_0|^2.$$

Considere agora δ um círculo de raio r, isto é, $\delta(t) = r\exp(it)$ e $\delta'(t) = ir\exp(it)$. Calculando a integral

$$\int_\delta \overline{z}\,dz = \int_0^{2\pi} \overline{\delta(t)}\delta'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \overline{r\exp(it)}ir\exp(it)\,dt$$

$$= ir^2 \int_0^{2\pi} \exp(-it)\exp(it)\,dt = ir^2 \int_0^{2\pi} dt = 2\pi r^2 i.$$

Observe que a integral no contorno fechado δ não é zero. Assim a função conjugado não possui primitiva em nenhum aberto (a ideia é refazer a integral acima para uma circunferência centrada em z_0 qualquer).

Por exemplo, no contorno composto do segmento de 0 a z_0 concatenado com a circunferência de raio $|z_0|$, a integral vale $(1/2 + 2\pi i)|z_0|^2$.

Já sabíamos que o conjugado não tem derivada. Agora sabemos também que ele não tem primitiva, isto é, nenhuma função satisfaz $f'(z) = \overline{z}$.

8.2 Teorema de Cauchy-Goursat

O teorema título dessa seção é um dos resultados fundamentais do curso.

O teorema de Cauchy-Goursat nos dá uma condição sobre o aberto D para que a integral sobre uma curva fechada dde uma função analítica seja zero.
Novamente a diferença topológica entre a reta e o plano se mostra, precisamos discutir as hipóteses sobre o domínio D.

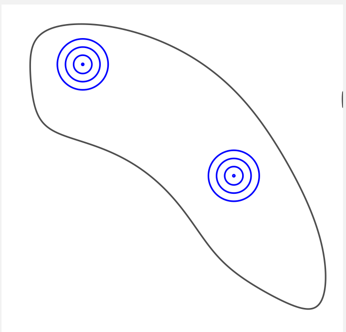
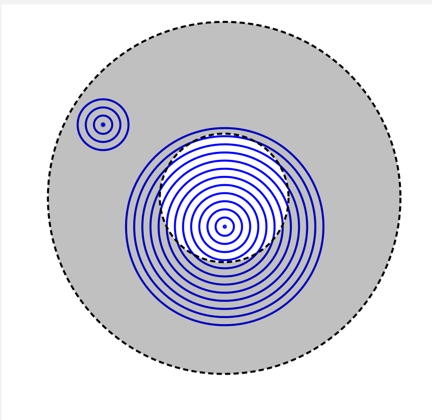
Definição

Um aberto $D \subset \mathbb{C}$ é

- conexo quando dado um par de pontos $z, w \in D$, existe uma curva contínua que começa em z e termina em w;
- simplesmente conexo quando é conexo e, além disso, toda curva simples e fechada em D pode ser deformada a um único ponto, sem sair D.

Mas professor...

Como uma curva pode ser deformada a um único ponto?
A ideia intuitiva é que podemos encolher a curva até sobrar só um ponto.
Na imagem da esquerda, vemos que os dois contornos (que são círculos) podem ser encolhidos até o seu centro (diminuindo o raio gradualmente) e isso é feito sem nunca sair do domínio.
Na imagem da direita, a situação é diferente: uma curva pode ser reduzida a um ponto, enquanto que a outra não: sempre que tentarmos reduzir um círculo que contém o buraco do domínio, precisamos sair do domínio em algum ponto.

Exemplo

É ilustrativo olhar para conjuntos que não são simplesmente conexos.

O disco perfurado $D = \{0 < |z| < 1\}$ não é simplesmente conexo. Curvas que não dão uma volta no centro podem ser deformadas a um ponto sem deixar D. No entanto qualquer curva que contenha $z = 0$ no seu interior não pode ser deformada sem atravessar $z = 0$ em algum momento.

O conjunto $S = \{|Re(z)| > 1\}$ não é conexo, pois os pontos -2 e 2 não podem ser ligados por um caminho contínuo sem atravessar a reta $Re(z) = 0$.

Todas as curvas simples e fechadas contidas em S podem ser deformadas a um único ponto. Isso porque S é formado por duas partes e cada uma delas é simplesmente conexa. Qualquer curva contínua em S precisa estar contida inteiramente em uma das duas partes, logo pode ser contraída.

Como S não é conexo, ele NÃO É simplesmente conexo, embora todas as curvas possam ser contraídas.

A definição topológica de conjunto conexo é diferente da fornecida acima. O que chamamos de conexo é conhecido como conexo por caminhos, já que qualquer par de pontos é ligado por uma curva.

Para abertos no plano as duas definições são equivalentes, e essa é mais intuitiva.

Observe que é difícil mostrar que um conjunto é simplesmente conexo – é preciso testar infinitos contornos. Já mostrar que ele não é é mais fácil - basta escolher um contorno adequado (um que tenha um buraco do domínio em seu interior).

Teorema

Teorema de Cauchy-Goursat

Se D é um aberto simplesmente conexo, f é harmônica em D e γ é uma curva simples e fechada em D, então

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Exemplo

Em qualquer curva γ simples e fechada

$$\int_\gamma \exp(z)\,dz = 0, \qquad \int_\gamma z^{75}\,dz = 0, \int_\gamma \sin^3(z)\cos(iz)\,dz = 0.$$

Toda função inteira tem integral nula sobre uma curva simples e fechada qualquer.

Podemos tratar curvas fechadas que não são simples subdividindo a curva em cada interseção.

Exemplo

Princípio da deformação de caminhos.

Podemos ganhar informação usando o teorema de Cauchy-Goursat mesmo quando a função não é analítica em alguns pontos no interior da curva. Para isso precisamos reescrever a curva usando um corte.

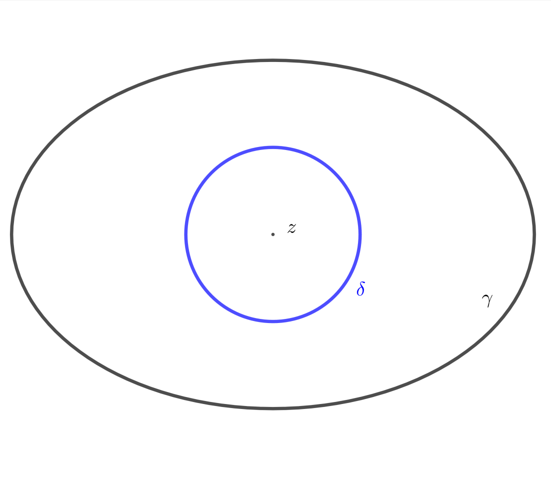
Considere as funções $f(z) = 1/z$ e $g(z) = 1/z^2$, elas são analíticas no plano perfurado $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.

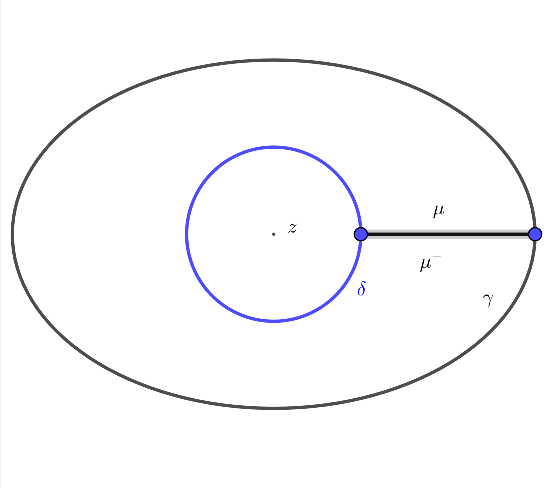
Vamos considerar as integrais

$$\int_\gamma f(z)dz, \quad \int_\gamma g(z)dz,$$

onde γ é a elipse $\gamma(t) = 3\cos t + i2\sin t$ que envolve $z = 0$.

Considere a curva auxiliar $\delta(t) = \cos t + i\sin t = \exp(it)$, o círculo unitário.





Por fim vamos construir o segmento de reta μ ligando os pontos de início da elipse e do círculo, isto é,

$$\mu(t) = (1-t)\gamma(0) + t\delta(0) = 3 - 2t.$$

Concatenando, nessa ordem, as curvas γ, μ, δ^- e μ^-, obtemos uma curva fechada Γ. O interior dessa curva não contém a singularidade $z = 0$, então f e g são analíticas no interior e sobre a curva Γ. Pelo teorema de Cauchy-Goursat,

$$\int_\Gamma \frac{dz}{z} = 0, \qquad \int_\Gamma \frac{dz}{z^2} = 0.$$

Agora vamos abrir a integral usando as propriedades de concatenação:

$$0 = \int_\Gamma \frac{dz}{z} = \int_\gamma \frac{dz}{z} + \int_\mu \frac{dz}{z} + \int_{\delta^-} \frac{dz}{z} + \int_{\mu^-} \frac{dz}{z} = \int_\gamma \frac{dz}{z} - \int_\delta \frac{dz}{z}.$$

Reescrevendo os termos e lembrando do exemplo da outra seção, vemos que

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_\delta \frac{dz}{z} = 2\pi i.$$

O argumento não depende da f: para a função g temos novamente

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2} = \int_\delta \frac{dz}{z^2} = 0.$$

O procedimento descrito acima é conhecido como princípio da deformação dos caminhos. A conclusão é que se não há singularidades de uma função f entre duas curvas fechadas simples, a integral sobre as duas curvas tem o mesmo valor.

Exemplo

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{1+z^2}$$

Dentro do contorno $|z| = 2$ a função tem duas singularidades, $z = i$ e $z = -i$. Reescrevemos o integrando como

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{z-i} - \frac{1}{2}\frac{1}{z+i},$$

segue do princípio da deformação de caminhos que

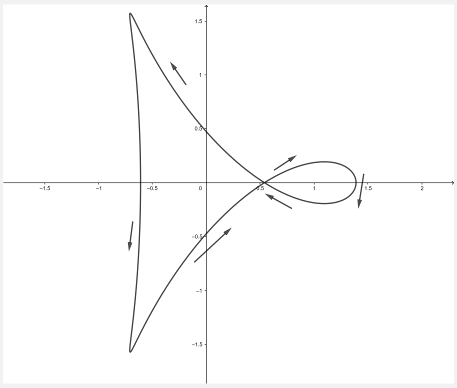
$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{1+z^2} = \int_{|z|=2} \frac{1}{2}\frac{1}{z-i} - \frac{1}{2}\frac{1}{z+i} dz =$$

$$= \int_{|z-i|=1/2} \frac{1}{2}\frac{1}{z-i} - \frac{1}{2}\frac{1}{z+i} dz + \int_{|z+i|=1/2} \frac{1}{2}\frac{1}{z-i} - \frac{1}{2}\frac{1}{z+i} dz$$

$$= \frac{1}{2}\int_{|z-i|=1/2} \frac{1}{z-i} dz + \frac{1}{2}\int_{|z+i|=1/2} -\frac{1}{z+i} dz = \pi i - \pi i = 0.$$

Exemplo

Considere o caminho C representado na figura.



Vamos calcular

$$\int_C \frac{8z-3}{z^2-z}\, dz.$$

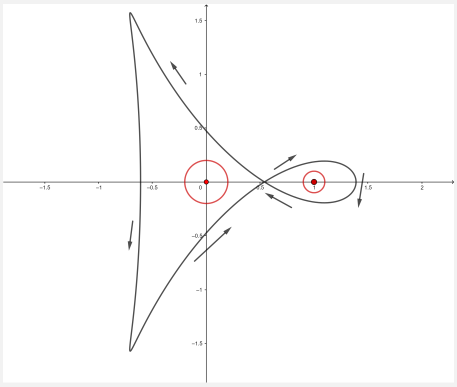
A função é analítica em todo o plano, exceto nas singularidades $z = 0$ e $z = 1$. Podemos reescrever o integrando na forma

$$\frac{8z-3}{z^2-z} = \frac{3}{z} + \frac{5}{z-1}.$$

A curva circula as duas, vamos separar a integral sobre cada laço usando o ponto onde a curva se autointersecta como divisor. Considere C_0 a parte da curva que dá uma volta em $z=0$ e C_1 a parte que dá uma volta em $z=1$. Temos

$$\int_C \frac{8z-3}{z^2-z}\,dz = \int_{C_0} \frac{8z-3}{z^2-z}\,dz + \int_{C_1} \frac{8z-3}{z^2-z}\,dz.$$

Agora usando o princípio da deformação de caminhos, podemos passar da integral em C_1 para a integral no círculo S_1 de raio r centrado em $z=1$. Da mesma forma podemos passar da integral em C_0 para a integral em S_0, um círculod e raio r centrado em $z=0$. Não precisamos usar o mesmo raio nas duas, mas podemos para economizar uma letra (no exemplo, $r=0.1$ é apropriado).



Temos então

$$\int_{C_0} \frac{8z-3}{z^2-z}\,dz = \int_{S_0} \frac{3}{z} + \frac{5}{z-1}\,dz = 3\int_{S_0} \frac{1}{z}\,dz + \int_{S_0} \frac{5}{z-1}\,dz = 6\pi i + 0,$$

onde a primeira integral é do exemplo no começo da seção e a segunda é zero pelo teorema de Cauchy-Goursat.

Observe que o caminho C_1 é percorrido no sentido antihorário. Assim, a circunferência S_1 também é percorrida no sentido antihorário. Como sabemos, inverter a orientação do caminho troca o sinal da integral:

$$\int_{C_1} \frac{8z-3}{z^2-z}\,dz = \int_{S_1} \frac{3}{z} + \frac{5}{z-1}\,dz = 3\int_{S_1} \frac{1}{z}\,dz - 5\int_{S_1^-} \frac{1}{z-1}\,dz = 0 - 10\pi i.$$

Veja que dessa vez a integral de $1/z$ é zero, pois ela é analítica sobre e no interior do círculo S_1.

Concluímos que

$$\int_C \frac{8z-3}{z^2-z}\,dz = -4\pi i.$$

Prof. Vanderley Ferreira - 2021

Uma consequência do teorema é que toda função analítica em um aberto D simplesmente conexo possui primitiva nesse aberto.

Vimos anteriormente entre a equivalência a integral em curvas fechadas ser zero e a independência do caminho para integrais.

Teorema

Se f é analítica no aberto simplesmente conexo D, então para cada $z_0 \in D$ a função

$$F(z) = \int_\gamma f(w)dw$$

é uma primitiva de f em D, onde γ é *qualquer* dos caminhos em D ligando z_0 a z.

Sabemos há algum tempo que uma função ter primitiva não significa que essa primitiva pode ser expressa por meio de funções elementares ($\sin x^2$, $\exp(-x^2)$).