Funções de Variável Complexa

Sumário

Começamos com uma estimativa que vai ter um papel importante no final do curso.

Teorema

Estimativa para a integral.

Se f é uma função definida em um aberto D onde vale a estimativa

$$|f(z)| \leq M, \quad z \in D,$$

e $\gamma : [a, b] \to D$ é um caminho de comprimento L, então

$$\left| \int_\gamma f(z)\, dz \right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))|\, |\gamma'(t)|\, dt \leq M\, L.$$

O resultado acima é conhecido como "a desigualdade ML". A parte que usaremos com mais frequência são os extremos.

A integral do meio é denotada, às vezes, como

$$\int_a^b |f(\gamma(t))|\, |\gamma'(t)|\, dt = \int_a^b |f(z)|\, |dz|.$$

Não faremos isso.

Exemplo

Obtenha uma estimativa para

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^3},$$

onde γ é o semicírculo centrado em $z = 0$ de raio R, $\gamma(t) = R \exp(it)$, $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$.

Sabendo que $|z| = R$, segue que $|z^{-3}| = R^{-3}$. Como a curva tem comprimento πR, temos

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^3} \leq \frac{\pi R}{R^3} = \frac{\pi}{R^2}.$$

Exemplo

Obtenha uma estimativa para

$$\int_{-R+Ri}^{R+Ri} \frac{\sin(z)}{1+z^2}\, dz.$$

Para $R > 1$ a função integrada é contínua e analítica sobre o segmento de reta ligando $-R+Ri$ e $R+Ri$. Sabemos que o comprimento do segmento é $2R$, precisamos estimar a função. Como o segmento é tangente à circunferência $|z| = R$, sabemos que

$$|z| \geq R \quad \Rightarrow \quad |z^2| \geq R^2,$$

usando a desigualdade triangular inversa, temos

$$|z^2 + 1| \geq |z^2| - |1| \geq R^2 - 1,$$

e finalmente

$$\left| \frac{1}{z^2+1} \right| \leq \frac{1}{R^2-1}.$$

Para o seno temos

$$|\sin(t + Ri)| = |\sin t \cosh R + i \cos t \sinh R| \leq$$

$$\leq |\sin t \cosh R| + |\cos t \sinh R| \leq \cosh R + \sinh R = \exp R.$$

Pela desigualdade ML,

$$\int_{-R+Ri}^{R+Ri} \frac{\sin(z)}{1+z^2}\, dz \leq \frac{2R}{R^2-1} e^R.$$

Prof. Vanderley Ferreira - 2021

8.3 Fórmula de Cauchy

A fórmula de Cauchy expressa a função no interior de um caminho fechado a partir dos valores sobre o caminho. Combinada com o teorema de Cauchy-Goursat da seção anterior, formam a base para tudo que faremos no segundo bimestre.

Nessa seção justificamos que toda função analítica tem infinitas derivadas.

Teorema

Fórmula de Cauchy

Se f é analítica em D e $\gamma : [a, b] \to D$ é um caminho fechado e simples, então para todo ponto z no interior de γ

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z}\, dw.$$

Antes de entrar nas consequências da fórmula acima, vamos usá-la na forma equivalente

$$\int_\gamma \frac{f(w)}{w - z}\, dw = 2\pi i f(z)$$

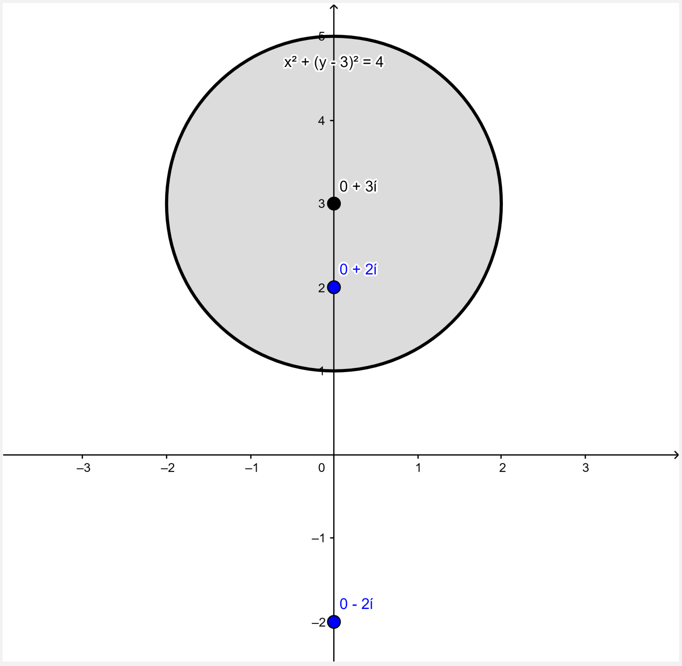
para calcular algumas integrais que não podíamos só com o teorema de Cauchy-Goursat.

Exemplo

Vamos calcular

$$\int_\gamma \frac{z + 1}{z^2 + 4} dz,$$

no círculo $|z-3i|=2$.



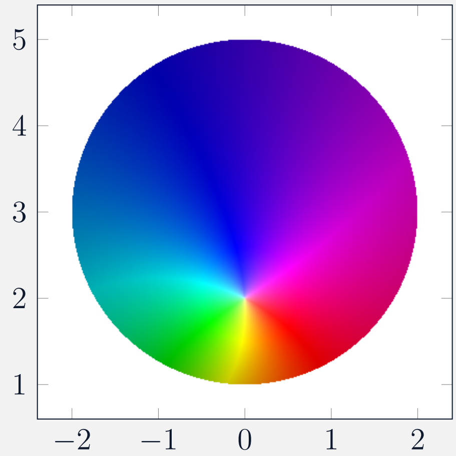
Dentro do contorno o integrando tem uma singularidade no ponto $2i$. Reescrevemos o integrando como

$$\frac{z+1}{z^2+4}=\frac{z+1}{z+2i}\frac{1}{z-2i}=\frac{g(z)}{z-2i},$$

onde a função g é analítica no contorno e em seu interior.

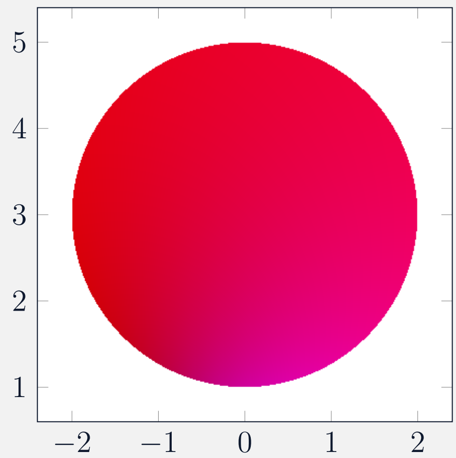
Podemos usar a fórmula de Cauchy com g, obtendo

$$\int_\gamma \frac{z+1}{z^2+4}dz=\int_\gamma \frac{g(z)}{z-2i}dz=2\pi i g(2i)=\frac{1+2i}{2}\pi.$$



f é singular dentro do contorno.

Prof. Vanderley Ferreira - 2021



g é analítica dentro do contorno.

Exemplo

$$\int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z} dz = 0.$$

Vamos calcular essa integral usando a fórmula de Cauchy e usando o teorema de Cauchy-Goursat, para contraste.

Sabemos que a função *sinc* é analítica em todo o plano, lembre-se que

$$sinc(z) = \begin{cases} \frac{\sin z}{z}, & z \neq 0 \\ 1, & z = 0. \end{cases}$$

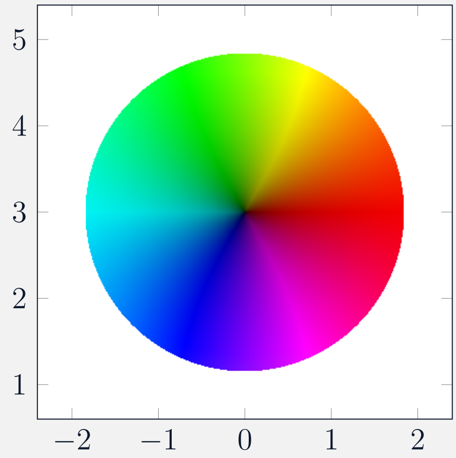
Assim, pelo teorema de Cauchy-Goursat, a integral no contorno fechado da função analítica *sinc* é zero.

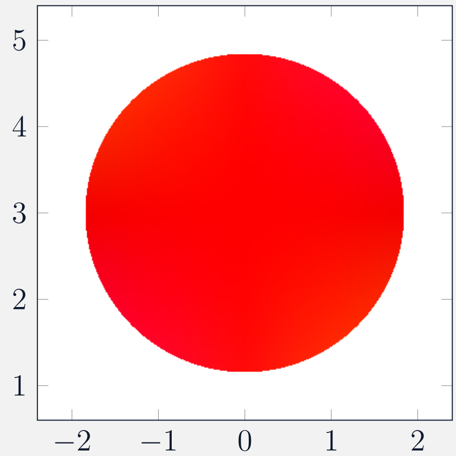
Defina $g(z) = \sin(z)$, sabemos que g é analítica em todo o plano, em particular sobre o contorno e em seu interior.

Aplicando a fórmula de Cauchy, temos

$$\int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z} dz = \int_{|z|=1} \frac{g(z)}{z} dz = 2\pi i g(0) = 0.$$

É preciso ser claro quando for usar um ou outro método. Para usar o teorema de Cauchy-Goursat é preciso deixar claro que a função integrada é analítica no interior. Veremos (em algumas semanas) que $z = 0$ para a função $\sin(z)/z$ é uma singularidade removível, e como fazer isso para outras funções. Por enquanto, precisamos mostrar que a função derivável usando a definição (primeiro que é contínua, depois que é derivável).





$\sin(z)$ e $sinc(z)$ são analíticas dentro do contorno, note que $\sin(0) = 0$.

Teorema

Segunda fórmula de Cauchy

Se f é analítica em D, $\gamma : [a, b] \to D$ é um contorno simples e fechado e z é um ponto no interior de γ, então f tem derivadas de todas as ordens em z e

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}} \, dw.$$

Prof. Vanderley Ferreira - 2021

Vamos olhar mais de perto a fórmula acima. Para $n = 0$ temos a fórmula de Cauchy anterior, que fornece o valor de f em z a partir dos valores em um contorno γ que o circula.

Para $n = 1$ temos

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^2}\, dw,$$

ou seja, f' é calculada a partir dos valores de f no contorno (que ficam a uma distância positiva de z). A derivada é um conceito local, expressa a variação da função em uma vizinhança muito pequena do ponto. A fórmula de Cauchy mostra que essa informação local está codificada longe do ponto - os valores de f no contorno γ determinam os valores no interior de γ.

Como antes vamos aplicar a versão

$$\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\, dw = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z)$$

para calcular o valor da integral na esquerda.

Exemplo

$$\int_{|z|=1} \frac{\exp z}{z^n}\, dz$$

A singularidade da função $f(z) = \frac{\exp z}{z^n}$ é apenas $z = 0$, para $n > 0$.

Defina $g(z) = \exp(z)$, g é analítica no interior e sobre o caminho. Tomando $z = 0$ na fórmula de Cauchy, temos

$$\int_{|z|=1} \frac{g(w)}{w^n}\, dw = \frac{2\pi i}{(n-1)!} g^{(n-1)}(0),$$

no nosso caso particular $g'(z) = g(z)$ e $g(0) = 1$, logo todas as derivadas em $z = 0$ são 1.

Segue

$$\int_{|z|=1} \frac{\exp(w)}{w^n}\, dw = \frac{2\pi i}{(n-1)!}.$$

Exemplo

Teorema do valor médio de Gauss

Quando f é analítica em D e $|z - z_0| \leq \rho$ está contido em D,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{it}) dt,$$

isto é, $f(z_0)$ é a média dos valores de f sobre o contorno $|z - z_0| = \rho$.

A igualdade acima segue da fórmula de Cauchy no ponto z_0:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Escrevendo a definição da integral acima, a curva é $\gamma(t) = z_0 + r\exp(it)$ e $\gamma'(t) = ir\exp(it)$, substituindo acima temos

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{re^{it}} ire^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt.$$

Consequências das fórmulas de Cauchy

Se f é derivável no aberto D, para cada ponto z_0 em D podemos encontrar um pequeno círculo centrado em z_0 e contido inteiramente em D (definição de aberto). Aplicando a fórmula de Cauchy usando um disco fechado contido dentro desse círculo como contorno, concluímos que f tem infinitas derivadas no ponto z_0. Como z_0 era qualquer, segue que f **tem infinitas derivadas em todo o aberto** D.

Como derivabilidade implica continuidade, segue que todas as derivadas de f são contínuas: se uma delas não fosse, a próxima não existiria.

Em particular, se f tem derivada no aberto D, essa derivada necessariamente é contínua[a].

[a] Usamos esse fato algumas vezes no primeiro bimestre.

Quando $f = u + iv$ é analítica, sua derivada é

$$f' = u_x + iv_x = v_y - iu_y.$$

Como f' também é derivável no mesmo aberto, também é analítica. Aplicando a fórmula acima para f', usando a derivada em x ou em y para cada expressão, obtemos

$$f'' = u_{xx} + iv_{xx} = v_{xy} - iu_{xy},$$

$$f'' = -u_{yy} - iv_{yy} = v_{yx} - iu_{yx}.$$

Cada uma das fórmulas acima implica que uma das derivadas de segunda ordem de u ou v é definida e contínua no domínio de f (uma função é contínua se e só se as partes real e imaginária são contínuas).

Usamos esse fato para mostrar que u e v são harmônicas.

Teorema

Se f é analítica no aberto D, então a derivada $f^{(n)}$ é definida e analítica no aberto D.

Sobre nomenclatura:

Uma função real é analítica quando ela tem infinitas derivadas e sua série de Taylor converge em todo o domínio para a própria f.

Uma função complexa é analítica quando ela tem uma derivada em um aberto. Por que essa diferença?

Já vimos que ter derivada em um aberto garante a existência de infinitas derivadas.

Mais à frente veremos que a série de Taylor existe e converge para a própria função - isto é, a função é analítica no sentido usual.