Funções de Variável Complexa

Mat46 2021 - Semana 11

Sumário

8.4 Mais teoremas sobre integrais 203

9 Séries **212**

9.1 Seqüências e séries 212

9.2 Seqüências e séries de funções 214

8.4 Mais teoremas sobre integrais

Vamos explorar as consequências teóricas das fórmulas de Cauchy para encerrar o estudo de integrais (por enquanto).

Teorema

Estimativa de Cauchy

Se f é analítica em D, o disco $|z - z_0| \leq r$ está contido em D e para todo w na fronteira do disco $|f(w)| \leq M$, então

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!M}{r^n}.$$

Essa desigualdade segue da fórmula de Cauchy, usando a desigualdade ML na integral.

De fato, da segunda fórmula de Cauchy

$$|f^{(n)}(z_0)| = \left|\frac{n!}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\, dw\right| = \frac{n!}{2\pi}\left|\int_{|z-z_0|=r} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\, dw\right|,$$

e sobre o contorno temos $|w - z_0| = r$, $|f(w)| \leq M$, logo

$$\left|\frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\right| \leq \frac{M}{r^{n+1}}.$$

Como o comprimento da curva é $2\pi r$, segue da desigualdade ML

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{2\pi}\frac{M}{r^{n+1}}2\pi r = \frac{n!M}{r^n}.$$

Exemplo

Se $|f(z)| \leq 3|$ no disco $|z| = 1$ e f é analítica no disco $|z| < 2$, o que podemos dizer sobre $|f'(0)|$?

Aplicando a estimativa de Cauchy no disco onde temos a estimativa de f, segue

$$|f'(0)| \leq \frac{1!\,3}{1} = 3.$$

Um exemplo de função que cumpre a condição acima é a função linear $f(z) = 3\exp(i\varphi)z$, observe que ela atinge a cota da estimativa: $f'(0) = 3\exp(i\varphi)$ tem norma 3.

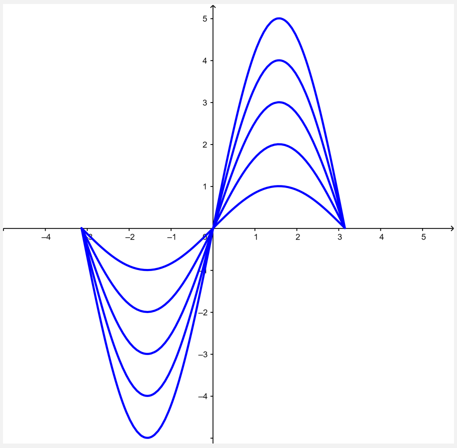
Exemplo

O exemplo anterior ilustra a rigidez das funções analíticas: saber estimar uma função real, mesmo analítica, nos extremos de um intervalo, não diz nada sobre os valores dela ou de suas derivadas no interior.

Considere $g_n(x) = n \sin x$, no intervalo $(-\pi, \pi)$ a função é analítica (isto é, sua série de Taylor converge) e temos

$$g_n(-\pi) = g_n(\pi) = 0,$$

no entanto $g_n'(0) = n \to \infty$, quando $n \to \infty$.



Mas professor...

Por que a versão complexa $g_n(z) = n \sin z$ não produz uma contradição então? Porque estamos testando em mais pontos: precisamos analisar $|g_n|$ em todos os pontos do disco $|z| = \pi$, e nesse exemplo em particular

$$g_n(i\pi) = n \sin(i\pi) = in \sinh \pi,$$

com $|\sinh \pi| > 10$, enquanto antes tínhamos $g_n = 0$ no bordo (real).

Exemplo

Se f é inteira e limitada, então $f^{(n)}(0) = 0, \quad \forall n > 0.$

Como f é limitada, temos $|f(z)| \leq M$ para algum $M > 0$ e para todo z complexo. Por outro lado, como f é inteira, podemos usar a estimativa de Cauchy em qualquer disco centrado em 0 e de raio $r > 0$:

$$|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!M}{r^n}.$$

Para um n fixado, o numerador da fração é uma constante (não depende de r). Tomando o limite na desigualdade acima quando $r \to \infty$, concluímos que $f^{(n)}(0) = 0$.

Esse exemplo fornece uma prova do

Teorema

Teorema de Liouville

Se f é inteira e limitada, então f é constante.

Esse resultado é notável pela simplicidade do enunciado e pelas suas consequências. Uma função inteira é uma função analítica em todo $\mathbb{C}$. Uma função é limitada quando $|f(z)| \leq M$, para todo z no domínio e para um $M > 0$ fixo.

Já sabemos que funções constantes são inteiras e limitadas. O teorema de Liouville apresenta a recíproca (nada óbvia): toda função inteira e limitada é constante.

Se você repassar os exemplos de funções inteiras que estudamos - trigonométricas, exponenciais, polinômios e até a função *sinc* - verá que nenhuma delas é limitada, todas vao para ∞ em alguma direção.

Funções reais que são analíticas e limitadas mas não são constantes são fáceis de ecncontrar: temos seno e cosseno, temos arcotangente e sua derivada $1/(1+x^2)$. Quando olhamos para sua extensão para o plano, vemos que na verdade elas são limitadas na direção do eixo real, mas não em outras direções (seno e cosseno) ou pontos (como $1/(1+z^2)$).

Exemplo

Vamos usar o teorema de Liouville para mostrar que não existe função inteira $f = u + iv$, não-constante, tal que $v \geq 0$ no plano todo.

Suponha que $f = u + iv$ é inteira e a parte imaginária de f nunca fica negativa. Dessa forma, a imagem de f está contida no semiplano superior, e em particular

$$|f(z) + i| \geq 1, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

isto é, $f(z)$ está a uma distância mínima de uma unidade do ponto $-i$.

Dessa forma a função

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - (-i)}$$

é uma função analítica em todo o plano: como f já é inteira, os únicos pontos onde g não será inteira serão onde o denominador se anula, e vimos que isso nunca ocorre.

Além disso a função g é limitada: usando a estimativa anterior,

$$|g(z)| = \frac{1}{|f(z) - (-i)|} \leq \frac{1}{1}.$$

Portanto do teorema de Liouville g é constante:

$$g(z) = C = \frac{1}{f(z) - (-i)} \quad \Rightarrow \quad f(z) = -i + \frac{1}{C},$$

e f também é constante.

O ponto crucial no exemplo acima é que a distância de $f(z)$ até o ponto é limitada por baixo. Apenas $f(z) \neq -i$ em todo o plano não é suficiente para garantir f constante (pense na função $w = \exp(z) - i$).

Exemplo

O teorema da representação conforme de Riemann (semana 8) diz que se $D \neq \mathbb{C}$ é um aberto simplesmente conexo, existe uma função bijeção conforme $f : D \to \{|z| < 1\}$.

A restrição que D não é todo o plano não pode ser removida: suponha que existe uma função analítica no plano todo $f : \mathbb{C} \to \{|z| < 1\}$, então sua imagem está contida no disco: f é limitada. Do teorema de Liouville, f é constante no plano – e funções constantes não são conformes, nem bijetivas.

Teorema

Teorema fundamental da álgebra

Se p é um polinômio não constante, então p tem uma raiz em $\mathbb{C}$.

Sim, o teorema fundamental da álgebra segue do teorema de Liouville, e por consequência da fórmula de Cauchy.

Vamos rascunhar a sua prova:

Seja

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$$

um polinômio complexo, suponha que p não tem nenhuma raiz em $\mathbb{C}$. Note que o único polinômio que não tem grau definido é o polinômio nulo, e ele tem raízes, então foi excluído na hipótese acima. Segue que p tem grau $n \geq 0$.

Dessa forma, a função

$$q(z) = \frac{1}{p(z)}$$

é uma função racional definida em todo o plano (pois o denominador nunca se anula) - ela é uma função inteira.

Estimando o módulo de q, temos

$$|q(z)| = \frac{1}{|p(z)|} = \frac{1}{|z^n||a_0 z^{-n} + a_1 z^{1-n} + \cdots + a_n|}.$$

Quando $|z| \to \infty$, temos que $|q(z)| \to 0$, logo q é limitada.

Do teorema de Liouville, q é uma função constante. Daí $p(z) = 1/q(z)$ também é constante.

Segue do teorema fundamental que enquanto o grau do polinômio for maior que 1, ele tem uma raiz em $\mathbb{C}$. Efetuando a divisão por $z - z_k$ a cada raiz obtida, podemos repetir o argumento e produzir uma nova (possivelmente repetida) raiz até que o quociente tenha grau zero.

Normalmente citamos esse resultado quando vamos usar o teorema fundamental da álgebra:

Todo polinômio de grau n tem exatamente n raízes em $\mathbb{C}$, contadas as suas multiplicidades.

Teorema

Teorema de Morera

Se f é contínua em D e

$$\int_\gamma f(z)dz = 0,$$

para todo contorno fechado $\gamma : [a, b] \to D$, então f é analítica em D.

Vimos que quando a integral de uma função em contornos fechados é sempre nula, a integral não depende do caminho e isso permite definir uma primitiva

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)dz,$$

onde $z_0 \in D$ é escolhido arbitrariamente.

Como F é analítica em D (por ser uma primitiva de f), sabemos da fórmula de Cauchy que F tem infinitas derivadas em D. Em particular F'' é definida em D. Mas $F' = f$, logo $F'' = f'$ e isso significa que f é analítica em D.

Teorema

Teorema do módulo máximo

Se f é analítica em D aberto, γ é um contorno fechado simples em D e f não é constante sobre e no interior de γ, então o máximo de $|f|$ é obtido sobre o contorno γ.

Esse resultado é similar ao princípio do máximo para soluções da equação de Laplace: quando uma função é harmônica em um aberto Ω, o máximo e mínimo dessa função são atingido na fronteira de Ω.

O teorema acima diz que quando f é analítica sobre e no interior da curva, o máximo do módulo de f é atingido na fronteira - que é a curva. A ligação entre funções harmônicas e funções complexas analíticas aparece mais uma vez.

Exemplo

Vale uma versão para o valor mínimo de $|f|$, quando $f \neq 0$ sobre e no interior da curva.

Note que nesse caso, $g = 1/f$ atende todas as hipóteses do teorema do módulo máximo, assim o valor máximo de $|g|$ é atingido sobre γ.

Mas o máximo de $|g|$ corresponde ao mínimo de $|f|$.

O teorema do módulo máximo fornece estimativas melhores para $|f|$ do que tínhamos usando a desigualdade triangular. Podemos encontrar o valor exato da melhor estimativa da função na curva: como γ é curva parametrizada, $|f(\gamma(t))|$ é uma função real de uma variável, e encontramos seu máximo em $[a, b]$ igualando a derivada a zero e analisando a e b.

9 Séries

9.1 Seqüências e séries

Definição

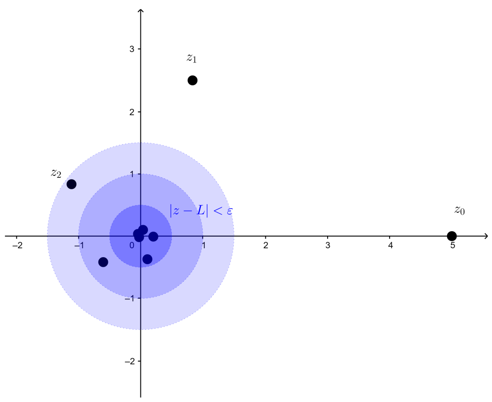
Uma sequência (z_n) é uma regra que associa a cada n natural um número $z_n \in \mathbb{C}$.

Dizemos que a sequência (f_n) converge para $z \in \mathbb{C}$ e escrevemos

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z,$$

quando

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \qquad n > n_0 \Rightarrow |z_n - z| < \varepsilon.$$



Prof. Vanderley Ferreira - 2021

Definição

Uma série

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n$$

é uma sequência (s_n) definida por

$$s_0 = z_0, \qquad s_{n+1} = s_n + z_{n+1}.$$

A série converge para $z \in \mathbb{C}$ quando a sequência (s_n) converge para z. Nesse caso escrevemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = z.$$

A série converge absolutamente quando $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ converge.

A série diverge quando ela não converge.

Uma série não precisa convergir.

Escrevendo $z_n = x_n + iy_n$, associamos a uma sequência ou série complexa duas sequências ou séries reais. A versão complexa converge se e somente se as suas partes real e imaginária convergem.

O resultado a seguir sumariza os critérios de convergência envolvendo séries que vamos precisar.

Teorema

Seja (z_n) uma sequência complexa.

- Se (z_n) diverge ou se $\lim_{n\to\infty} z_n \neq 0$, então a série $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ diverge.
- Se $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ converge absolutamente, então $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ converge.
- Se existe o limite
$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = L$$
e
  - se $L < 1$, então $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ converge absolutamente.
  - se $L > 1$, então $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ diverge.
- Se existe o limite
$$\lim_{n\to\infty} |z_n|^{1/n} = L$$
e
  - se $L < 1$, então $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ converge absolutamente.
  - se $L > 1$, então $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ diverge.

Mas professor...

Cadê os exemplos?

Como nosso foco serão séries de potências, não vamos nos prender nas sequências e séries numéricas complexas. Espere vários exemplos na seção 9.3.

9.2 Seqüências e séries de funções

Definição

Uma sequência de funções (f_n) é uma regra que associa a cada n natural uma função $f_n : D \to \mathbb{C}$.

Dizemos que a sequência (f_n) converge pontualmente para $f : D \to \mathbb{C}$ quando

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z),$$

para todo $z \in D$.

Dizemos que a sequência (f_n) converge uniformemente para $f : D \to \mathbb{C}$ quando

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \qquad n > n_0 \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon,$$

para todo $z \in D$, e n_0 não depende de z.

A definição de convergência uniforme não é prática, vamos sempre usar os critérios de convergência uniforme.

Não vamos nos prender a exemplos de sequências de funções gerais, nosso principal interesse são as séries de potências complexas.

Definição

Uma série de funções

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n$$

é uma sequência (s_n) definida por

$$s_0 = f_0, \qquad s_{n+1} = s_n + f_{n+1}.$$

A série converge pontualmente para $f : D \to \mathbb{C}$ quando (s_n) converge pontualmente para f.

A série converge uniformemente para $f : D \to \mathbb{C}$ quando (s_n) converge uniformemente para f, e nesse caso escrevemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n = f.$$

Assim como uma série não precisa convergir, uma série de funções nem sempre converge em algum ponto do domínio.

Quando dizemos que $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge em apenas parte do domínio, na prática o que estamos dizendo é: tomando U como o conjunto dos pontos onde a série converge, a série das restrições $\sum_{n=0}^{\infty} f_n|_U$ converge.

Exemplo

Uma sequência de números complexos (a_n) e um ponto $z_0 \in \mathbb{C}$ definem a série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n.$$

Dizemos que a série de potências acima é centrada em z_0 e tem coeficientes a_n.

A série de potências sempre converge em $z = z_0$.

Exemplo

Considere a série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

temos $z_0 = 0$ e $a_n = 1$.

Fixando z_1 e aplicando o teste da razão na série $\sum_{n=0}^{\infty}(z_1)^n$, temos

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_1^{n+1}}{z_1^n}\right| = \lim_{n\to\infty}|z_1| = |z_1|.$$

Segue que a série converge se $|z| < 1$ e diverge se $|z| > 1$.

Como de costume, nada pode ser dito sobre os pontos $|z| = 1$.

A soma dessa série de potências é

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z},$$

de modo análogo ao caso real.

No disco $|z| < 1$ a função $\frac{1}{1-z}$ é representada pela série acima.

Para estabelecer a igualdade acima, use a definição de convergência de série.

Exemplo

A série de Taylor da função exponencial é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

vamos aplicar o teste da razão para verificar onde há convergência. Para z fixo temos a série com coeficiente $b_n = z^n/n!$, calculando o limite

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z^{n+1}/(n+1)!}{z^n/n!}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{z^{n+1}n!}{z^n n!(n+1)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{z}{n+1}\right| = 0.$$

Assim a série é convergente para todo $z \in \mathbb{C}$.

Definição

Dizemos que R é o raio de convergência da série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

quando a série é convergente para todo z com $|z-z_0|<R$ e divergente para todo z com $|z-z_0|>R$.

O caso $R=0$ corresponde a uma série que só converge em $z=z_0$, enquanto o caso $R=\infty$ corresponde a uma série que converge em todo o plano.

Exemplo

Aplicando o teste da razão na série de potências geral

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n,$$

novamente fixando z temos

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(z-z_0)^{n+1}}{a_n(z-z_0)^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||z-z_0| = |z-z_0|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Suponha que existe (ou é infinito) o limite

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L,$$

o critério da razão nos diz que a série de potências converge em z quando $|z-z_0|L<1$ e diverge quando $|z-z_0|L>1$.

Em outras palavras,

$$R=\frac{1}{L}=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$$

é o raio de convergência da série de potências.

O raio de convergência também pode ser calculado usando o teste da raiz,

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}},$$

quando o limite existe.

Teorema

Critério de convergência uniforme

Se a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_1 - z_0)^n$$

converge e $R = |z_1 - z_0|$, então a série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

converge uniformemente no disco $|z - z_0| \leq r$, para todo $0 < r < R$.

Teorema

Derivação e integração termo a termo

Se a série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

é convergente no disco $D = \{|z - z_0| < R\}$, então a função $f : D \to \mathbb{C}$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

é

- contínua em D;
- diferenciável em D e

  $$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1},$$

  para todo $z \in D$;
- integrável sobre todo caminho γ em D, e

  $$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_\gamma (z - z_0)^n dz.$$

Escolhendo o caminho de integração começando em z_0 permite escrever a série de potências da integral de f,

$$\int_{z_0}^{z} f(w)dw = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1}.$$

Exemplo

Vamos obter novas séries usando a série geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z},$$

válida em $|z| < 1$.

Derivando os dois lados, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = \frac{1}{(1-z)^2},$$

novamente válida para $|z| < 1$. Para escrever na forma padrão de séries de potências, tome $k = n-1$, obtendo

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) z^k = \frac{1}{(1-z)^2}.$$

Escrevendo $w = 1 - z$, obtemos na série geométrica

$$\frac{1}{w} = \sum_{n=0}^{\infty} (1-w)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (w-1)^n,$$

uma série de potências centrada em $w = 1$. Como a função é analítica no disco $|w-1| < 1$, para cada w dentro do disco podemos integrar no segmento ligando 1 a w, obtendo

$$\int_1^w \frac{1}{z} dz = Log(w),$$

e do outro lado

$$\int_1^w \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_1^w (-1)^n (z-1)^n dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} w^{n+1},$$

que nos dá a representação de Log em série de potências, também válida para $|w-1| < 1$:

$$Log(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} w^{n+1}.$$

Para escrever na forma padrão de séries de potências, tome $k = n+1$, obtendo

$$Log(w) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} w^k.$$

Note que a soma começa em $k = 1$, o que significa apenas que $a_0 = 0$ (pois $Log(1) = 0$). O essencial é somar apenas potências de $w - w_0$ no expoente correto.