Instituto Tecnológico de Aeronáutica

MAT46 - Funções de Variável Complexa - Lista 10

Fórmula de Cauchy

Sempre que não for expresso, considere que caminhos fechados são percorridos no sentido antihorário.

Exercício 1. Deduza as desigualdades

1.1.
$$\left|\int_{|z|=R} \frac{Log(z)}{z^2} dz\right| \leq 2\pi \frac{\pi + \ln R}{R}, \quad \forall R > 1$$

1.2.
$$\left|\int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^2} dz\right| \leq 2\pi e$$

1.3. no arco de circunferência $|z| = 2$ contido no primeiro quadrante,

$$\left|\int_{\gamma} \frac{dz}{1+z^2}\right| \leq \frac{\pi}{3}$$

Exercício 2. Calcule as integrais abaixo.

(1) $\displaystyle\int_{|z|=4} \frac{\cosh^3(z^2+3z-1)}{e^{z^2}}\, dz$

(2) $\displaystyle\int_{|z|=4} \frac{1}{z^2+z+1}\, dz$

(3) $\displaystyle\int_{|z|=4} \frac{\mathrm{Log}(z+5)}{z^2+2z+1}\, dz$

(4) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{e^{z^3}}{z(z-1)^2}\, dz$

(5) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z^n}{z-1}\, dz$

(6) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{z^n}{z-2}\, dz$

(7) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\sinh(z)}{z^m}\, dz$, $m \in \mathbb{Z}$

(8) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^3}\, dz$

(9) $\displaystyle\int_{|z-(1+i)|=5/4} \frac{\mathrm{Log}\, z}{(z-1)^2}\, dz$

(10) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{1}{z^2(z^2-4)e^z}\, dz$

(11) $\displaystyle\int_{|z-1|=1} \left(\frac{z}{z-1}\right)^n dz$

(12) $\displaystyle\int_{|z-a|=a} \frac{z}{z^4-1}\, dz$, $a > 0$

(13) $\displaystyle\int_{\gamma}^{1} \frac{\cos z}{z^4-1}\, dz$ onde γ é a poligonal $(0,-1) \to (3,-1) \to (3,1) \to (0,1) \to (0,-1)$

Exercício 3. Considerando a integral $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z}\, dz$ prove que

3.1. $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{\cos t} \cos(\sin t)\, dt = \pi.$

3.2. $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{\cos t} \cos(\sin t)\, dt = 0.$

3.3. $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{\cos t} \sin(\sin t)\, dt = 2\pi.$

Exercício 4. Seja f analítica no aberto D, γ um caminho fechado e simples em D, cujo interior está contido em D. Suponha que $f \equiv 0$ sobre γ. Mostre que $f \equiv 0$ no interior de γ.

Exercício 5. Seja $D \subset \mathbb{C}$ um aberto que contem o disco fechado $|z - z_0| \leq \rho$. Mostre que se $u : D \to \mathbb{R}$ é uma função harmônica em D, então vale a fórmula do valor médio

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + \rho e^{it})\, dt.$$

Bons estudos.