**Instituto Tecnológico de Aeronáutica**

**MAT46 - Funções de Variável Complexa - Lista 11**

## Integral III - Consequências da fórmula de Cauchy

---

Sempre que não for expresso, considere que caminhos fechados são percorridos no sentido antihorário.

**Exercício 1.** Para quais valores de $z$, com $|z| \leq \sqrt[8]{2}$, a função

$$f(z) = \left|\left(-\sqrt{3} + i\right) z^4 + (1 - i)\right|$$

assume o valor máximo?

**Exercício 2.** Encontre todas as funções que são analíticas em $|z| < 1$ e satisfazem as condições $f(0) = 1$ e $|f(z)| \geq 1$ para $|z| < 1$.

**Exercício 3.** Encontre o máximo de $|f(z)|$ no disco $|z| \leq 1$ para as funções $f(z)$ abaixo

(1) $z^2 - 3z + 2$ (2) $\cos 3z$ (3) $e^z$ (4) $\dfrac{2z+1}{2z-1}$

**Exercício 4.** Considere o polinômio complexo $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, tal que $|p(z)| \leq 1$, para todo $z \in \mathbb{C}$, com $|z| \leq 1$. Mostre que $|p(z)| \leq |z|^n$, para todo $z \in \mathbb{C}$, tal que $|z| \geq 1$.

**Exercício 5.** Seja $f$ uma função inteira.

(1) Se $f$ é tal que $|f(z)| \leq A + B|z|^{3/2}$, para todo $z \in \mathbb{C}$. Mostre que $f(z) = a + bz$.

(2) Se $f$ é tal que $|f'(z)| \leq |z|$, para todo $z \in \mathbb{C}$. Mostre que $f(z) = a + bz^2$ com $|b| \leq \frac{1}{2}$.

**Exercício 6.** Seja $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ e $f : \bar{\Omega} \to \mathbb{C}$ analítica em $\Omega$ e contínua em $\bar{\Omega}$. Suponha que $|f(z)| \leq 3$, $\forall z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| = 1$ e $|f(z)| \leq 12$, $\forall z \in \mathbb{C}$, tal que $|z| = 2$. Mostre que $|f(z)| \leq 3|z|^2$, $\forall \in \bar{\Omega}$.

**Exercício 7.** Seja $f$ inteira e tal que $\left|\dfrac{f(z)}{z^n}\right| \leq M$, para $|z| \geq R$. Mostre que é um polinômio de grau menor ou igual a $n$, $n \in \mathbb{N}$.

**Exercício 8.** Seja $f$ inteira, tal que $\displaystyle\lim_{|z|\to\infty} \frac{f(z)}{|z|} = 0$. Mostre que $f$ é constante.

**Exercício 9.** Sejam $U$ aberto e limitado, $\gamma$ caminho simples e fechado em $U$ e $D$ o interior de $\gamma$. Se $f : U \to \mathbb{C}$ é analítica e $|f(z) - 1| < 1$, para todo $z$ na curva $\gamma$, mostre que $f$ não se anula em $D$.