Instituto Tecnológico de Aeronáutica

MAT46 - Funções de Variável Complexa - Lista 12

Séries de Taylor, séries de Laurent

Exercício 1. Determine o raio de convergência das séries de potências abaixo

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}$ (3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(\cos(ni))z^n$ (5) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}z^n$

(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n z^n}{4^n+5^n}$ (4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}z^{3^n}$

Exercício 2. Determine os valores de z em que cada série abaixo converge

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(2z+3)^n}{3^n}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(z^2+2z+1)^n}{2^n}$ (3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^n(z-3)^n$

Exercício 3. Considere $g(z)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n!}$.

(1) Determine a série que representa $g'(z)$ e a expressão para $g'(z)$ calculando a soma da série.

(2) Deduza do item anterior uma expressão para $g(z)$.

Exercício 4. Funções especiais

4.1. A função erro é definida pela integral

$$\operatorname{erf}(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z \exp(-w^2)dw.$$

Usando a série de $\exp(-z^2)$ determine a série de Taylor de erf centrada em $z=0$. Qual seu raio de convergência?

4.2. Escreva a série de Taylor de sinc centrada em $z=0$. Qual seu raio de convergência?

Exercício 5. Considere o ramo principal analítico $f(z)=\text{Log}$.

5.1. Explique porque o maior disco no qual a série de Taylor de f centrada em $z=-+i$ converge para f tem raio igual a 1.

5.2. Mostre que essa série é

$$\frac{1}{2}\ln 2+\frac{3}{4}\pi i-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1+i}{2}\right)^n(z+1-i)^n.$$

5.3. Mostre usando o critério preferido que o raio de convergência da série acima é $\sqrt{2}$.

5.4. Explique porque os itens 4.1 e 4.3 não produzem uma contradição.

Exercício 6. Encontre a série de Taylor e o raio de convergência em cada caso.

6.1. $\mathrm{Log}(1-z)$ centrada em $z=0$.

6.2. $\mathrm{Log}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ centrada em $z=0$.

Exercício 7. Considere a série de funções

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! z^n}.$$

7.1. Mostre que a série define uma função analítica em $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.

7.2. Calcule $\displaystyle\int_{|z|=1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! z^n}\right) dz.$

Exercício 8. Determine a expansão em série de Laurent da função $\frac{1}{z(4+z^2)}$ nas regiões indicadas abaixo:

8.1. $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 2\}$

8.2. $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-2i| < 2\}$

8.3. $D = \{z \in \mathbb{C} : |z-2i| > 4\}$

Exercício 9. Determine todas as séries de Laurent e o respectivo anel de convergência para as funções abaixo, em torno do ponto indicado.

9.1. $\dfrac{e^z}{z^2}$, $z_0 = 0$

9.2. $\dfrac{1}{z(z-1)(z-2)}$, $z_0 = 0$

Exercício 10. Considere a série de Laurent em torno de $z=0$,

$$\exp\left(\frac{w}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(w) z^n.$$

10.1. Encontre o anel de convergência da série. Esse domínio depende de w?

10.2. A função $J_n(w)$ é chamada *função de Bessel* de ordem n. Mostre usando o teorema de Laurent que

$$J_n(w) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \exp(-i(nt - w\sin t))dt.$$

10.3. Usando o item anterior e a mudança de variáveis $s=-t$ na integral, mostre que

$$J_n(w) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(w\sin t - nt)\, dt.$$

10.4. Mostre que $J_{-n}(t) = (-1)^n J_n(t)$

10.5. Mostre usando a série original que

$$\sum_{n=0}^{\infty} J_n(w) = 1.$$