Instituto Tecnológico de Aeronáutica

MAT46 - Funções de Variável Complexa - Lista 13

Singularidades e zeros de funções analíticas

Exercício 1. Verifique a ordem do zero z_0 para cada uma das funções abaixo:

(1) $z^3(\sin z^4 - z^4)$, $z_0 = 0$

(2) $\sinh^5\left(z - \frac{\pi}{2}i\right) - i\left(z - \frac{\pi}{2}i\right)^4$, $z_0 = \frac{\pi}{2}i$

Exercício 2. Classifique as singularidades das funções abaixo

(1) $\dfrac{1}{\cos z}$

(2) $\dfrac{e^z(z-3)}{(z-1)(z-5)}$

(3) $\dfrac{e^z - 1}{z}$

(4) $\dfrac{z^6+1}{(z-1)^3(3z+2)^2}$

(5) $\dfrac{\cos \pi z}{1-2z}$

(6) $\dfrac{z}{(e^z-1)(e^z-2)}$

(7) $\dfrac{1}{\cos \frac{1}{z}}$

(8) $\dfrac{1-\cos z}{1-\exp z}$

(9) $\dfrac{1}{1+\mathrm{Log}(z)}$

Exercício 3. Considere a integral $I(R) = \displaystyle\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z}\,\mathrm{d}z$, $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $0 \le t \le \pi$, $R > 0$.

(1) Expresse as partes $\mathrm{Re}(I(R))$ e $\mathrm{Im}(I(R))$ na forma de integrais.

(2) Use a série de potências de e^{iz} para mostrar que $I(R) = i\left(\pi - 2\displaystyle\int_0^R \frac{\sin\theta}{\theta}\,\mathrm{d}\theta\right)$.

(3) Use a parte $\mathrm{Im}(I(R))$ obtida em 1. para mostrar que $\lim\limits_{R\to\infty} I(R) = 0$.

(4) Conclua que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin\theta}{\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}$.

Exercício 4. Sejam $f, g : D \to \mathbb{C}$ analíticas no aberto D. Considere $z_0 \in D$, tal que $f^{(k)}(z_0) = 0 = g^{(k)}(z_0)$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$ e $g^{(m)}(z_0) \neq 0$ mostre que $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{f^{(m)}(z_0)}{g^{(m)(z_0)}}$.

Exercício 5. Suponha que f é uma função analítica em z_0, não constante e tal que que $f(z_0) = a$. Use a definção de limite (semana 2) para mostrar que existe $r > 0$, tal que $f(z) \neq a$, $\forall z \in D_r(z_0)\backslash\{z_0\}$.