



Resíduos

Exercício 1. Calcule os resíduos em todas as singularidades de cada função.

1.1. $\sin(z) + \sin(1/z)$

1.4. $1/\cos(1/z)$

1.2. $\cos(1 - (1/z))$

1.5. $(z + 2)/(z^2 - 2z)$

1.3. $1/(1 - \exp(iz))$

1.6. $\tanh(z)$

Exercício 2. Mostre que se f tem um zero de ordem k em z_0 , então

$$\text{Res}\left(\frac{f'}{f}, z_0\right) = k.$$

Calcule $\text{Res}(f''/f', z_0)$ e $\text{Res}(f''/f, z_0)$.

Exercício 3. Suponha que f e g tem um pólo simples no mesmo ponto z_0 . Expresse $\text{Res}(f \times g, z_0)$ em função de f e g .

Exercício 4. Calcule a integral justificando com o teorema dos resíduos (ou o de sua preferência).

4.1 $\int_{|z|=5} \frac{\sin z}{z^2 - 4} dz$

4.5 $\int_{|z-1/2|=1} \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz$

4.2 $\int_{|z|=8} \tan z dz$

4.6 $\int_{|z|=1} z^n \exp(1/z) dz, \quad n \in \mathbb{N}$

4.3 $\int_{|z|=3} \frac{\csc z}{z} dz$

4.7 $\int_{|z|=r} \frac{5z - 2}{z(z - 1)} dz, \quad r > 0$

4.4 $\int_{|z+1-i|=1} \frac{z}{z^3 - z^2 + z + 1} dz$

4.8 $\int_{|z+1|=\sqrt{8}} \frac{1}{z^4 - 16} dz$

Exercício 5. Calcule cada integral, justifique os passos.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{z^2 - 2z + 4} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^2 dz}{(z^2 + 1)^2} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{1 + z^4} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(z^2 + 1)(z^2 + 2z + 2)}$$

Exercício 6. Se p é um polinômio de grau $n \geq 2$ e todos os zeros z_k de p estão no interior do círculo $|z| = R$, então

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{Res} \left(\frac{1}{p(z)}, z_k \right) = 0.$$

6.1. Verifique a afirmação para um polinômio de grau dois usando frações parciais.

6.2. Verifique a afirmação para um polinômio de grau três usando frações parciais.

6.3. Em uma frase explique porque a igualdade é válida no caso geral.

6.4. Por que pedimos $n \geq 2$?