Instituto Tecnológico de Aeronáutica

MAT46 - Funções de Variável Complexa - Lista 15

Integrais de funções reais

Exercício 1. Calcule a integral justificando com o teorema dos resíduos (ou o de sua preferência).

1.1 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos t}{2+\cos t}dt$

1.2 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{3-2\cos t+\sin t}dt$

1.3 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+b\cos t}dt, \quad a>b>0$

1.4 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t))dt, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(t))dt$

1.5 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mx}{(x^2+a^2)^2}dx$

1.6 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x}{x^2+1}\right)^2 dx$

1.7 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x+1}{(x^2+1)(x^2+2)}dx$

1.8 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^3}dx$

1.9 $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx, \ \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}dx,$

1.10 $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^4+1}dx$

1.11 $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx$

1.12 $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\ln(x+1)}{x^2+1}dx$

1.13 $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1}dx$

1.14 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(\cos t)\cosh(\sin t)dt$

1.15 $\displaystyle\int_0^{\infty} \sin(x^2)dx$

1.16 $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\sin^2 t}dt$

Exercício 2. A transformada de Fourier de uma função real f suficientemente comportada é

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\exp(-ix\omega)dx.$$

Considere $g(x) = 1/(1+x^2)$.

2.1. Calcule da definição $\hat{g}(0)$.

2.2. Encontre o valor da transformada de Fourier de g em $\omega \neq 0$ usando uma integral de contorno. Faz diferença o sinal de ω?

2.3. A função $\hat{g}$ é contínua em $\mathbb{R}$?

Exercício 3. A transformada de Fourier inversa de $\hat{f}(\omega)$ é

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \exp(ix\omega) d\omega.$$

Sabendo que $\hat{g}(\omega) = 1/(1 - i\omega)^2$, determine a função original g.