Instituto Tecnológico de Aeronáutica

MAT46 - Funções de Variável Complexa - Lista 3

Diferenciabilidade e Funções Analíticas, Equações de Cauchy-Riemann e Funções Harmônicas

---

Exercício 1. Usando a definição, calcule a derivada de $f(z) = z^3 - 2z$ nos pontos:

1.1. $z = z_0$

1.2. $z = -1$

Exercício 2. Determine todos os pontos $z \in \mathbb{C}$ em que f é derivável e descreva o maior conjunto onde f é analítica.

2.1. $f(z) = |z|$

2.2. $f(z) = |x^2 - y^2| + 2i|xy|$.

Exercício 3. Use a Regra de L'Hôpital e determine os limites abaixo:

3.1. $\displaystyle\lim_{z\to i} \frac{z^{10}+1}{z^6+1}$

3.2. $\displaystyle\lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{e^z - 1}$

3.3. $\displaystyle\lim_{z\to 0} \frac{\sin z - z}{z^2}$

Regra de L'Hôpital: Sejam $f, g : D \to \mathbb{C}$ deriváveis em $z_0 \in D$. Se $f(z_0) = g(z_0) = 0$ e $g'(z_0) \neq 0$, então

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Exercício 4. Suponha que $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é inteira e vale $f(2z) = 2f(z)$ para todo z. Mostre que existe uma constante c tal que $f(z) = cz$ para todo z.

Exercício 5. Mostre que se f e $\overline{f}$ são funções analíticas em $\mathbb{C}$, isto é, são inteiras, então f é constante.

Exercício 6. Dê um exemplo de uma função inteira $f(z)$ — não constante — em que não vale a igualdade$f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$.

Exercício 7. Verifique quais das funções abaixo são analíticas em seu domínio e quais são inteiras. Nos casos em que a função é analítica, encontre a função derivada.

7.1. $f(z) = \mathrm{Arg}(z)$

7.2. $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$

7.3. $f(x+iy) = 2xy + i(y^2 - x^2)$

Exercício 8. Verifique quais das funções abaixo são harmônicas e exiba seus conjugados harmônicos. Dê a expressão para $f(z)$.

8.1. $u(x,y) = xy^3 - x^3y$

8.2. $u(x,y) = 3x^2 + 2x^2 - y^3 - 2y^2$

8.3. $u(x,y) = \sin(x-y)$

8.4. $u(x,y) = e^{-2xy}\sin(x^2 - y^2)$

Exercício 9. Marque V (verdadeiro) ou F (falso) para as seguintes afirmações, justificando as suas respostas e citando os resultados usados:

9.1. ( ) A função $f(z) = \dfrac{x}{x^2+y^2} + i\dfrac{y}{x^2+y^2}$ é diferenciável para todo $z \neq 0$.

9.2. ( ) A função $f(z) = x^2 + y^2$ não é analítica em qualquer ponto.

9.3. ( ) A função $f(z) = x^2 + y^2 + 2ixy$ é diferenciável em todo o eixo x.

9.4. ( ) A função $f(z) = z^2 + \bar{z}$ não é analítica em qualquer ponto.

9.5. ( ) Mesmo que as Equações de Cauchy-Riemann sejam satisfeitas em um ponto z, a função $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ pode não ser diferenciável em z.

9.6. ( ) Existe uma função analítica $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ tal que $u(x,y) = y^3 + 5x$.

Bons Estudos!!!