Instituto Tecnológico de Aeronáutica

MAT46 - Funções de Variável Complexa - Lista 6

Funções conformes, Transformação de Möbius, Equação de Laplace

---

Exercício 1. Encontre os pontos fixos das transformações

1.1. $w = \dfrac{2z-5}{z+4}$

1.2. $w = iz + 2 - i$

1.3. $w = z^2$

1.4. $w = z + \dfrac{1}{z}$

1.5. $w = iz^2 + (2-i)z$

1.6. $w = 2z - 3i\bar{z} + 5 - 4i$

Exercício 2. Dado o triângulo T no plano z com vértices em $i, 1-i, 1+i$, esboce a imagem da região interior de T sob cada uma das transformações abaixo.

2.1. $w = z^2$

2.2. $w = iz^2 + (2-i)z$

2.3. $w = z + \dfrac{1}{z}$

Exercício 3. Para cada item abaixo, determine uma transformação de Möbius T tal que:

3.1. T transforma os pontos $-1, i$ e $1+i$ respectivamente nos pontos $2, 3$ e 4.

3.2. T transforma os pontos $1, -i$ e 1 respectivamente nos pontos $0, 1$ e ∞.

3.3. T mapeia $|z| \leq 1$ em $|w-1| \leq 1$ tal que $1, -i$ correspondem a 2, 0, respectivamente

Exercício 4. Encontre a transformação de Möbius que mapeia o semiplano superior do plano z no plano w tal que $z = i$ é mapeado no $w = 0$ enquanto o ponto no infinito é mapeado no $w = -1$.

Exercício 5. Prove que sob a transformação $w = \dfrac{z-i}{iz-1}$, a região $\operatorname{Im} z \geq 0$ é mapeada na região $|w| \leq 1$. O que podemos dizer sobre a região $\operatorname{Im} z \leq 0$?

Exercício 6. Suponha que uma transformação de Möbius possui somente um ponto fixo a. Mostre que ela pode ser escrita na forma $\dfrac{1}{w-a} = \dfrac{1}{z-a} + k$ em que k é uma constante.

Exercício 7. Resolva os problemas de valores de contorno para a equação de Laplace abaixo.

7.1.
$$\begin{cases} \Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0,\ x^2 + y^2 > 1 \\ \lim_{r\to 1^-} \Phi(r,\varphi) = \begin{cases} 3, & 0 < \varphi < \pi \\ 0, & \pi < \varphi < 2\pi \end{cases} \end{cases}$$

7.2.
$$\begin{cases} \Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0,\ x \in \mathbb{R},\ y > 0 \\ \lim_{y\to 0^+} \Phi(x,y) = \begin{cases} T_0,\ x < -1 \\ T_1,\ -1 < x < 1 \\ T_2,\ x > 1 \end{cases} \end{cases}$$

MAT46 - Funções de Variável Complexa - Lista 6

Principais resultados usados

Definição: ponto fixo de uma função

Um ponto $z_0 \in D$ é *ponto fixo* da função $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ quando

$$f(z_0) = z_0.$$

Definição: ponto crítico

Um ponto $z_0 \in D$ é *ponto crítico* da função $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ quando

$$f'(z_0) = 0.$$

Definição: ângulo entre curvas regulares

Uma curva $\gamma : (a, b) \to \mathbb{C}$ é *regular* em (a, b) se

$$\gamma'(t) \neq 0, \quad \forall\, t \in (a, b).$$

Sejam $\gamma_1,\ \gamma_2 : (a, b) \to \mathbb{C}$ duas curvas regulares que se interceptam em z_0, isto é,

$$\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0) = z_0.$$

O ângulo entre γ_1 e γ_2 no ponto z_0 é o ângulo formado pelos vetores $\gamma_1'(t_0)$ e $\gamma_2'(t_0)$.

Definição: função conforme

Uma função $f : D \to \mathbb{C}$ é conforme em z_0 quando f preserva o ângulo entre curvas regulares que se interceptam em z_0.

O ângulo deve ser preservado em magnitude e sentido!

Teorema

Se $f : D \to \mathbb{C}$ é analítica em z_0 e $f'(z_0) \neq 0$, então f é conforme em z_0.