Instituto Tecnológico de Aeronáutica

MAT46 - Funções de Variável Complexa - Lista 9

Integrais, Teorema de Cauchy

Sempre que não for expresso, considere que caminhos fechados são percorridos no sentido antihorário.

Exercício 1. Para cada uma das funções f e cada camínho γ dados abaixo, determine a valor da integral $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$.

(1) $f(z) = \operatorname{Im} z - \operatorname{Re} z - 3(\operatorname{Re} z)^2 i$ e γ é o segmento de reta que une $z_0 = 0$ a $z_1 = 1 + i$.

(2) $f(z) = \operatorname{Im} z - \operatorname{Re} z - 3(\operatorname{Re} z)^2 i$ e γ é a poligonal que une $z_0 = 0, z_1 = i$ e $z_2 = 1 + i$.

(3) $f(z) = \pi \exp(\pi \bar{z})$ e γ é a poligonal fechada que une $z_0 = 0, z_1 = 1, z_2 = 1 + i, z_3 = i$ e z_0.

(4) $f(z) = (\operatorname{Re} z)^2 - (\operatorname{Im} z)^2$ e γ é o segmento de reta que une $z_0 = 0$ a $z_1 = i$.

Exercício 2. Vamos mostrar que

$$\text{área}(D) = \frac{1}{2i} \int_{\partial D} \bar{z}\, dz,$$

quando o aberto limitado D tem como fronteira um caminho fechado simples.

2.1. Suponha que D é a região entre os gráficos das funções suaves $f,\ g$:

$$D = \{(x, y);\ a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}.$$

Escreva a fronteira como um caminho, determine sua derivada e calcule

$$\int_{\partial D} \bar{z}\, dz.$$

2.2. Use o teorema de Green para obter o caso geral.

Exercício 3. Seja $\Omega = C \backslash \{z \in C : \operatorname{Im} z = 0 \text{ e } \operatorname{Re} z \leq 1\}$ e considere o ramo analítico de $\sqrt{z^2 - 1}$ definido sobre Ω que seja positivo no intervalo $(1, \infty)$.

(1) Utilizando o ramo acima, mostre que a imagem da função $z + \sqrt{z^2 - 1}$ não intercepta o intervalo $(-\infty, 0]$.

(2) Mostre que $\operatorname{Log}(z + \sqrt{z^2 - 1})$ é uma primitiva de $\frac{1}{\sqrt{z^2-1}}$ em Ω,

(3) Calcule $\displaystyle\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z^2 - 1}}$ em que $\gamma(t) = 2e^{it},\ -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}$.

Exercício 4. Avalie cada uma das integrais abaixo ao longo da curva γ indicada, determinando uma primitiva de cada função integranda e o domínio de analicidade desta primitiva.

(1) $\int_1^{2+i} \sin^2 z\,\mathrm{d}z$ em que γ é o arco de circunferência $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1,\ y \leq 1$.

(2) $\int_i^{1+2i} z \cos^3 z^2\,\mathrm{d}z$ em que γ é o arco de circunferência $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1,\ y \leq 1$.

(3) $\int_{-1+i}^{1-i} \frac{1}{z^2+4}\,\mathrm{d}z$ em que γ é o poligonal unindo os pontos $z_0 = -1+i$, $z_1 = -i$, $z_3 = \dfrac{1+i}{2}$, $z_2 = 1+i$ e $z_4 = 1-i$.

Exercício 5. Seja $f(z) = u(z) + iv(z)$ uma função inteira. Mostre que se $u(z) \leq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$, então f é constante.

Exercício 6. Mostre que

$$\int_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{z^3(z^2+10)} = \int_{|z|=2} \frac{\mathrm{d}z}{z^3(z^2+10)}$$

Dica: não é preciso calcular as integrais.

Exercício 7. Calcule as integrais

(1) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z^2-1}{z^2+1}\,\mathrm{d}z.$

(2) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{|z|e^z}{z^2}\,\mathrm{d}z.$

(3) $\displaystyle\int_{|z-1|=2} \frac{1}{z^2-2i}\,\mathrm{d}z.$

(4) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{|z|e^z}{z^2}\,\mathrm{d}z.$

(5) $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{2z^2-15z+30}{z^3-10z^2+32z-32}\,\mathrm{d}z.$

Bons estudos.