Funções de Variável Complexa

Semana 14

Sumário

Prof. Vanderley Ferreira - 2021

10 Resíduos

O foco desse capítulo é listar as técnicas de cálculo do resíduo de uma função em um pólo, e em seguida aplicar esses resíduos a várias integrais de funções reais.

10.1 Cálculo de resíduos

Considere uma função f analítica no anel $0 < |z - z_0| < R$ e a sua representação em série de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Definição

O resíduo de f na singularidade isolada z_0 é

$$Res(f, z_0) = a_{-1},$$

o coeficiente de $1/(z - z_0)$ na série de Laurent de f em $0 < |z - z_0| < R$.

Prof. Vanderley Ferreira - 2021

Os coeficientes a_n são dados pela integral

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}dw,$$

Portanto

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{0}}dw = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(w)dw.$$

A forma que precisamos da equação acima é

$$\int_\gamma f(w)dw = 2\pi i Res(f, z_0),$$

vamos usar o resíduo para resolver integrais.

Exemplo

Em uma singularidade removível o resíduo é zero. Lembre que nesse tipo de singularidade a função é representada pela série de Taylor, logo $a_{-1} = 0$.

Exemplo

Usando a série de $\exp(1/z)$ em $z = 0$ já obtida,

$$\exp(1/z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{1}{z^n},$$

obtemos o resíduo

$$Res(\exp(1/z), 0) = a_{-1} = 1.$$

Em geral não vamos expandir as funções em série para encontrar o resíduo. Os resultados a seguir permitem calcular o resíduo de acordo com o tipo de singularidade.

Não há critério geral para tratar singularidades essenciais.

Prof. Vanderley Ferreira - 2021

Teorema

Se z_0 é uma singularidade removível de f, então

$$Res(f, z_0) = 0.$$

Teorema

Se z_0 é um pólo simples de f, então

$$Res(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} f(z)(z - z_0).$$

A ideia é escrever a função como quociente

$$f(z) = \frac{g(z)}{z - z_0},$$

e expandir g como série de Taylor em z_0, obtendo

$$f(z) = \frac{1}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n = \frac{b_0}{z - z_0} + b_1 + b_2(z - z_0) + \cdots$$

Observe que o coeficiente que acompanha $1/(z - z_0)$ é b_0, fornecido por g.

Teorema

Se $g,\ h$ são funções analíticas em um disco contendo z_0 e

$$g(z_0) \neq 0, \quad h(z_0) = 0, \quad h'(z_0) \neq 0,$$

então

$$Res\left(\frac{g(z)}{h(z)}, z_0\right) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

Prof. Vanderley Ferreira - 2021

A fórmula acima é conveniente quando tratamos de funções que não são racionais. Ela só pode ser aplicada para pólos simples, a versão equivalente para pólos de ordem mais alta não é prática.

Exemplo

A função tan tem singularidades isoladas nos pontos $z_k = \pi/2 + k\pi$ para k inteiro. Considerando $g(z) = 1/\tan(z) = \cos(z)/\sin(z)$, sabemos que

$$g(z_k) = \frac{\cos(\pi/2 + k\pi)}{\sin(\pi/2 + k\pi)} = \frac{0}{\pm 1},$$

enquanto

$$g'(z) = \frac{-1}{\sin(z)^2}, \qquad g'(z_k) = \frac{-1}{\pm 1} \neq 0.$$

Logo g tem um zero simples em cada z_k, e concluímos que tan tem um pólo simples em cada z_k.

Agora que classificamos a singularidade, podemos calcular o resíduo em cada pólo:

$$Res(\tan, z_k) = Res\left(\frac{\sin z}{\cos z}, z_k\right) = \frac{\sin(z_k)}{\cos'(z_k)} = -1.$$

Exemplo

$$f(z) = \frac{1}{z^4 + 1}$$

Vamos calcular os resíduos de f em cada singularidade. Como o polinômio $p(z) = z^4 + 1$ tem quatro raízes, $z_k = \exp((2k-1)\pi i/4)$, $k = 0, 1, 2, 3$, cada zero tem multiplicidade um. Concluímos que f tem quatro pólos simples em z_k.

Calculando os resíduos

$$Res(f, z_k) = Res\left(\frac{1}{z^4+1}, z_k\right) = \frac{1}{4z_k^3} = \frac{\exp((1-2k)\pi i 3/4)}{4}.$$

Prof. Vanderley Ferreira - 2021

Teorema

Se z_0 é um pólo de ordem k de f, então

$$Res(f, z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left(f(z)(z-z_0)^k \right).$$

Quando $k = 2$, temos

$$Res(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{d}{dz} \left(f(z)(z-z_0)^2 \right) = \lim_{z \to z_0} \left(f'(z)(z-z_0)^2 + 2f(z)(z-z_0) \right).$$

Para ordens altas, a fórmula acima não é prática, é preferível olhar para a série de potências de f.

A ideia da fórmula é que em um pólo temos o quociente de uma função analítica g por $(z-z_0)^k$. Para isolar o coeficiente de $1/(z-z_0)$ de f, precisamos isolar g (multiplicando por $(z-z_0)^k$) e então derivar $k-1$ vezes para eliminar os termos a_{-2}, a_{-3} etc. Por fim, tomamos o limite e dividimos pelo fatorial para remover o fator introduzido pelas derivadas.

Exemplo

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z+2i)}$$

No pólo simples $-2i$ temos resíduo

$$Res(f, -2i) = \lim_{z \to -2i} (z+2i) f(z) = \lim_{z \to -2i} \frac{1}{z^2} = -\frac{1}{4}.$$

No pólo duplo 0 temos o resíduo

$$Res(f, 0) = \lim_{z \to 0} \frac{d}{dz} z^2 f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{d}{dz} \frac{1}{z+2i} = \lim_{z \to 0} -\frac{1}{(z+2i)^2} = \frac{1}{4}.$$

Prof. Vanderley Ferreira - 2021

A principal ferramenta que possibilita aplicar resíduos ao cálculo de integrais interessantes é o resultado a seguir. A prova combina o princípio da deformação de caminhos e a definição de resíduo.

Teorema

Teorema dos Resíduos

Sejam D aberto simplesmente conexo, γ um caminho simples fechado em D e f analítica em $D \backslash \{z_1,\ z_2,\ ..., z_n\}$.

Se as singularidades isoladas z_k estão no interior de γ, então

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f, z_k).$$

Exemplo

$$\int_\gamma \frac{2z+6}{z^2+4}dz$$

Considere inicialmente γ o círculo de centro $z = i$ e raio 2.

Fatorando o quociente dentro da integral, obtemos $z^2 + 4 = (z - 2i)(z + 2i)$, assim temos as singularidades $\pm 2i$ e cada uma é um pólo simples (verifique). Como apenas $2i$ está dentro do contorno de integração,

$$\int_\gamma \frac{2z+6}{z^2+4}dz = 2\pi i Res\left(\frac{2z+6}{z^2+4}, 2i\right) = 2\pi i \lim_{z\to 2\pi i} \frac{2z+6}{z+2i} = \pi(3+2i).$$

Tomando agora γ o círculo de centro 0 e raio 3, os dois pólos estão dentro do do contorno. Temos então

$$\int_\gamma \frac{2z+6}{z^2+4}dz = 2\pi i \left(Res\left(\frac{2z+6}{z^2+4}, 2i\right) + Res\left(\frac{2z+6}{z^2+4}, -2i\right)\right)$$

$$= 2\pi i \left(\frac{2-3i}{2} + \frac{2+3i}{2}\right) = 4\pi i.$$

Prof. Vanderley Ferreira - 2021

Definição

Seja f analítica em uma vizinhança do infinito. O resíduo de f em $z = \infty$ é

$$Res(f, \infty) = -Res\left(\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right).$$

A inversão dentro da função leva a singularidade em $z = \infty$ para $w = 0$. O termo $1/z^2$ faz a correção dos coeficientes.

A fórmula acima é útil para integrais de funções com muitas singularidades dentro de um círculo. Escolhendo um círculo $|z| = R$ que envolve todas as singularidades em seu interior, pelo teorema dos resíduos

$$\int_{|z|=R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=0}^{n} Res(f, z_k)$$

e precisamos calcular cada resíduo.

Usando o resíduo no infinito,

$$\int_{|z|=R} f(z)dz = -2\pi i Res(f, \infty) = Res\left(\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right),$$

onde o sinal negativo aparece porque estamos invertendo a orientação da integral (para colocar o infinito "dentro" do contorno de integração).

10.2 Calculando integrais reais

Prof. Vanderley Ferreira - 2021

A ideia é converter uma integral de uma função real em uma integral de contorno no plano complexo, em seguida usar o teorema dos resíduos para calcular essa integral e recuperar o valor da integral original.

A técnica se adapta a diferentes famílias de integrais, cada uma requer uma adaptação mas os passos básicos são os mesmos:

1. Escrever a integral real como integral de contorno;
2. Calcular a integral de contorno por resíduos;
3. Remover as partes do contorno que não importam obtendo o valor da integral original.

Quando a integral for imprópria, um passo extra será necessário,

4. Verificar a convergência da integral.

10.3 Integrando funções racionais

Sejam $p,\ q$ polinômios, onde q não tem raiz real e

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m},$$

vamos resolver integrais do tipo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx.$$

Exemplo

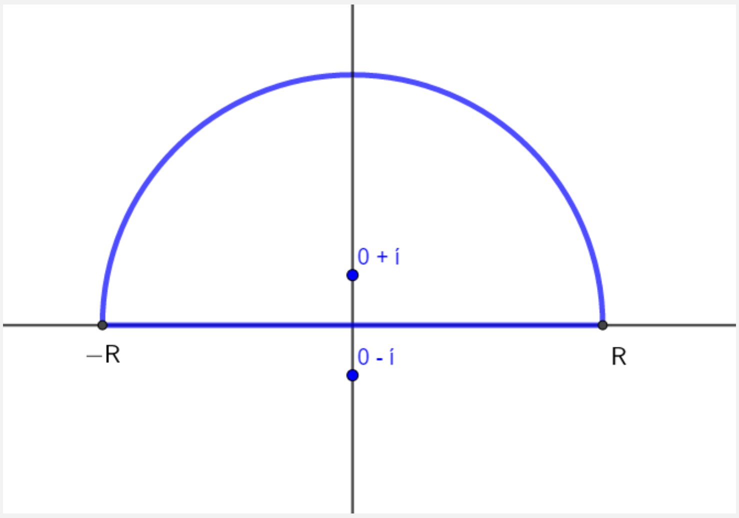
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\, dx.$$

1. Escrever a integral real como integral de contorno

O primeiro passo é recobrar que essa integral é imprópria, assim é um limite:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\, dx = \lim_{R\to\infty} \lim_{T\to-\infty} \int_{T}^{R} \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\, dx.$$

As integrais dentro do limite são integrais finitas, vamos usar elas pra construir um contorno. A escolha boa nesses casos é a fronteira do semidisco superior de raio R, denotado Γ_R:



Definindo a função *complexa* $g(z) = \frac{z^2}{(1+z^2)^2}$, podemos escrever a integral da função no contorno como soma de duas partes, sobre o segmento e sobre o arco de circunferência (que vamos denotar γ_R):

$$\int_{\Gamma_R} g(z)\, dz = \int_{-R}^{R} \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\, dx + \int_{\gamma_R} g(z)\, dz,$$

note que no segmento $[-R, R]$ a função se reduz à expressão original, por isso escrevemos a integral com relação a x.

Por fim pra reconstruir nossa expressão original, tomamos limite:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\, dx = \lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} g(z)\, dz - \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} g(z)\, dz,$$

essa igualdade será verdadeira se mostrarmos que cada limite na direita existe (é finito).

2. Calcular a integral de contorno por resíduos

A função g tem 2 pólos, $\pm i$, cada um de ordem 2.

Apenas o pólo i está dentro do contorno (para $R > 1$), assim pelo teorema dos resíduos:

$$\int_{\Gamma_R} g(z)\, dz = 2\pi i Res(g, i).$$

Como calculamos o resíduo em um pólo duplo?

$$Res(g, i) = \lim_{z\to i} \left(\frac{d}{dz}(z-i)^2 g(z) \right) = \lim_{z\to i} \left(\frac{d}{dz} \frac{z^2}{(z+i)^2} \right) = \lim_{z\to i} \frac{2iz}{(z+i)^3} = -\frac{i}{4}.$$

Segue portanto que a integral vale $\frac{\pi}{2}$, e como o resultado na direita não depende de R, podemos tomar o limite:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} g(z)\, dz = \frac{\pi}{2}.$$

3. Remover as partes do contorno que não importam obtendo o valor da integral original

Vamos mostrar que o limite que falta é nulo, e portanto nossa integral original vale $\pi/2$.

A ideia é usar a desigualdade ML e estimar $|g(z)|$ no arco de circunferência. Podemos fazer de algumas formas, uma usa desigualdade triangular inversa, outra é a que segue:

Fatorando $|z|$ na maior potência possível nos termos da fração, vem

$$|g(z)| = \frac{|z|^2}{|z^2+1|^2} = \frac{|z|^2}{|z|^4 \left|1 + \frac{1}{|z|^2}\right|^2},$$

essa técnica é comum no cálculo de limites no infinito no cálculo. Agora conhecemos o limite

$$\lim_{|z|\to\infty} \left|1 + \frac{1}{|z|^2}\right|^2 = 1,$$

logo sabemos que

$$\left|1 + \frac{1}{|z|^2}\right|^2 \geq \frac{1}{2}, \quad R \text{ suficientemente grande.}$$

Como o termo acima aparece no denominador da função, a desigualdade se inverte:

$$|g(z)| \leq \frac{2}{|z|^2}, \quad R \text{ suficientemente grande.}$$

Agora estimamos a integral: o comprimento de γ_R é $R\pi$, logo

$$\left| \int_{\gamma_R} g(z) dz \right| \leq \frac{2}{R^2} R\pi = \frac{2\pi}{R}.$$

Prof. Vanderley Ferreira - 2021

Segue

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} g(z)\,dz = 0.$$

Portanto

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R} g(z)\,dz - \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} g(z)\,dz = \frac{\pi}{2} - 0.$$

A integral original é definida pelo limite duplo

$$\lim_{R\to\infty}\lim_{T\to-\infty}\int_{T}^{R}\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx.$$

A integral que calculamos é o limite simétrico

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx.$$

Quando a primeira integral converge, as duas tem o mesmo valor. Mas essa convergência não é garantida.

No nosso caso, o integrando é uma função par. Isso permite a manipulação

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty}\lim_{T\to-\infty}\int_{T}^{R}\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx &= \lim_{R\to\infty}\lim_{T\to-\infty}\left(\int_{0}^{R}\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx + \int_{T}^{0}\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx\right)\\
&= \lim_{R\to\infty}\lim_{T\to-\infty}\left(\int_{0}^{R}\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx + \int_{0}^{-T}\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx\right)\\
&= 2\lim_{R\to\infty}\int_{0}^{R}\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx.
\end{aligned}$$

Portanto a integral original vale $\pi/2$.

Quando não temos simetria da função na integral é preciso verificar a convergência, com as técnicas do cálculo, por exemplo comparando a função com outra função integrável conhecida.

O limite calculado é chamado Valor Principal da integral.

Prof. Vanderley Ferreira - 2021