Funções de Variável Complexa

Mat46 2021 – Semana 1

Sumário

Prof. Vanderley Ferreira - 2021

1 Revisão de números complexos

Essa seção descreve as propriedades operatórias dos números complexos.

Elas estão agregadas abaixo para relembrar e para fácil referência nas próximas seções.

1.1 Definição de número complexo

Definição

O número complexo i é definido pela propriedade

$$i^2 = -1.$$

Definição

Um número complexo é uma expressão

$$z = x + yi,$$

onde x e y são números reais.

Definição

Os números reais x e y são chamados de parte real e parte imaginária de $z = x + yi$.

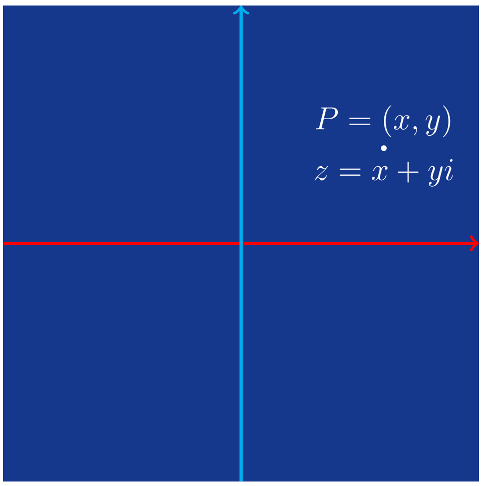
Essa é a forma binomial do número z.

Escrevemos $Re(z) = x$ e $Im(z) = y$.

Quando $Re(z) = 0$ dizemos que z é imaginário puro. Quando $Im(z) = 0$ dizemos que z é número real.

Identificando o número $z = x + yi$ ao ponto $P = (x, y)$ do plano podemos visualizar os números complexos.

Esse modelo dará intuição geométrica para as operações e propriedades.



Números reais ocupam o eixo x, números imaginários puros ocupam o eixo y.

Definição

Dois complexos $z = x + yi$ e $w = r + si$ são iguais quando suas partes reais e imaginárias são iguais:

$$z = w \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = r \\ y = s \end{cases}$$

Definição

O conjunto dos números complexos é

$$\mathbb{C} = \{z = x + yi; \quad x, y \in \mathbb{R}\}.$$

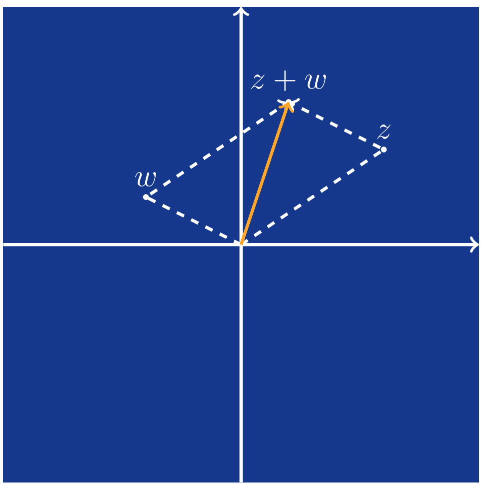
1.2 Operando com números complexos

Definição

A soma de $z = x + yi$ e $w = r + si$ é o número complexo

$$z + w = (x + r) + (y + s)i.$$

Essa operação corresponde à soma vetorial no plano.



Definição

O produto de $z = x + yi$ e $w = r + si$ é o número complexo

$$z\,w = (xr - ys) + (xs + yr)i.$$

Exemplo

Multiplicando sucessivamente um número z por i, obtemos:

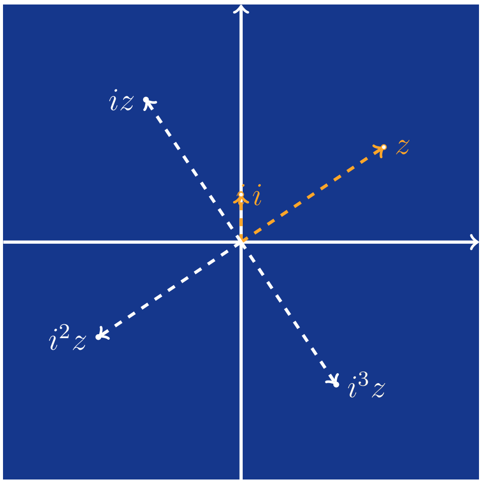
$$iz = (0 + 1i)(x + iy) = -y + xi,$$

$$i^2 z = i(iz) = i(-y + xi) = -x - yi,$$

$$i^3 z = i(i^2 z) = i(-x - yi) = y - xi,$$

$$i^4 z = i(i^3 z) = i(y - xi) = x + yi = z.$$

Os pontos $z,\ iz,\ i^2 z,\ i^3 z$ formam um quadrado.



Prof. Vanderley Ferreira - 2021

A soma e multiplicação de números complexos tem todas as propriedades operatórias que estamos acostumados:

- Comutatividade

$$z + w = w + z, \quad z\,w = w\,z.$$

- Associatividade

$$z + (w + v) = (z + w) + v, \quad z\,(w\,v) = (z\,w)\,v.$$

- Distributividade

$$z\,(w + v) = z\,w + z\,v.$$

Os números reais 0 e 1 são elementos neutros das operações:

$$0 + z = z + 0 = z, \qquad 1\,z = z\,1 = z.$$

O oposto de $z = x + yi$ é

$$-z = -x + (-y)i = -1(x + yi) :$$

$$z + (-z) = 0.$$

O inverso de $z = x + yi \neq 0$ é

$$z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{-y}{x^2 + y^2}i.$$

De fato,

$$z\,z^{-1} = x\frac{x}{x^2 + y^2} + y\frac{y}{x^2 + y^2} + x\frac{-y}{x^2 + y^2}i + y\frac{x}{x^2 + y^2}i = 1.$$

1.3 Polinômios e o conjugado

Como $i^2 = -1$, segue que $i^2 + 1 = 0$: i é uma raiz do polinômio

$$p(z) = z^2 + 1.$$

Esse polinômio tem duas raízes: a outra é $-i$.

Em geral quando $z = x + yi$ é solução da equação polinomial

$$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_n z^n = 0$$

e **os coeficientes** a_i **são reais**, o número $\overline{z} = x - yi$ também é solução da mesma equação.

É comum usar a expressão *raízes conjugadas* da equação.

Definição

O conjugado de $z = x + yi$ é o número

$$\overline{z} = x - yi.$$

Exemplo

O conjugado de uma soma é a soma do conjugado de cada termo. O mesmo vale para o produto, como pode ser verificado diretamente:

$$\overline{(z\,w)} = \overline{(x + yi)(r + si)} = \overline{(xr - ys) + (xs + yr)i} = (xr - ys) - (xs + yr)i,$$

enquanto

$$\overline{z}\,\overline{w} = (x - yi)(r - si) = xr - (-y)(-s) + (-xs - yr)i = xr - ys - (xs + yr)i.$$

Prof. Vanderley Ferreira - 2021

A primeira aplicação do conjugado vem do fato que multiplicar z por $\overline{z}$ produz um número real não-negativo:

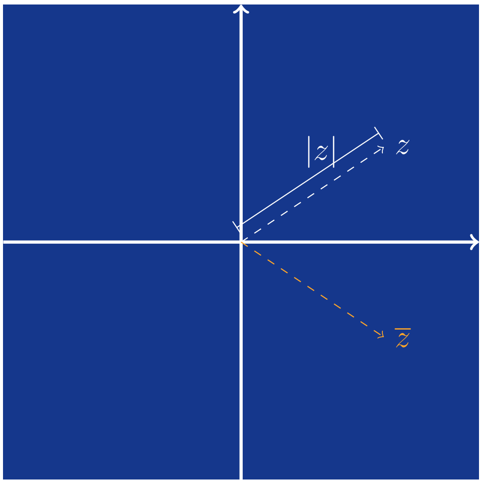
$$z\,\overline{z} = (x+yi)(x-yi) = x^2 - (yi)^2 = x^2 - y^2i^2 = x^2 + y^2.$$

Definição

O módulo do número complexo $z = x + yi$ é

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{z\,\overline{z}}.$$

O conjugado de z é a reflexão de z em relação ao eixo real. O módulo de z é a distância do ponto (x, y) à origem.



Vamos explorar a igualdade $z\,\overline{z} = |z|^2$.

Para $z \neq 0$, dividindo de cada lado por $|z|^2 \neq 0$, temos

$$\frac{z\,\overline{z}}{|z|^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad z\,\frac{\overline{z}}{|z|^2} = 1.$$

Na expressão da direita, reconhecemos o inverso de z:

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Essa propriedade também permite simplificar expressões com um número complexo no denominador, “multiplicando pelo conjugado”.

Exemplo

Qual a solução em $\mathbb{C}$ de $|z| = |z - i|$?

Solução algébrica: tome $z = x + yi$, então

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad |z - i| = |x + (y-1)i| = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$$

Igualando as expressões e elevando ao quadrado,

$$x^2 + y^2 = x^2 + y^2 - 2y + 1,$$

e segue que $2y = 1$:

$$z = x + \frac{i}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

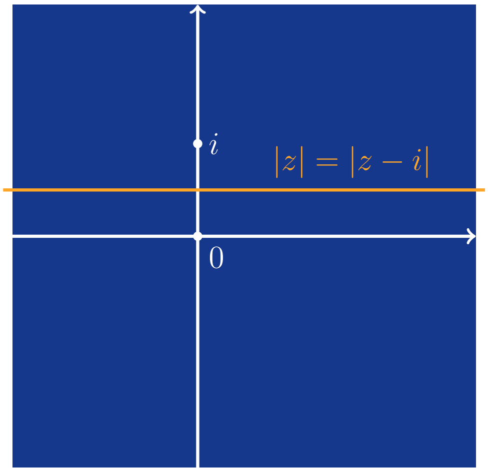
Solução geométrica:

$$|z| = |z - i|$$

$$\Downarrow$$

$$d(z, 0) = d(z, i)$$

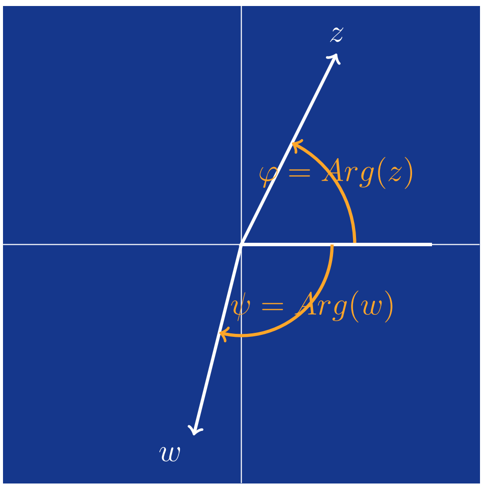
Logo a solução é a mediatriz de $(0, 0)$ e $(0, 1)$.



1.4 Forma polar do número complexo

Escrevendo as coordenadas polares do ponto $P = (x, y)$, obtemos $P = (r, \varphi)$ onde φ é o ângulo entre o eixo x e o segmento OP.

Já vimos que $r = |z|$ corresponde ao módulo do número complexo z.



Prof. Vanderley Ferreira - 2021

Definição

A forma polar do número complexo z é

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

onde r e φ são números reais e $r \geq 0$.

A forma polar de um número $z \neq 0$ é única, a menos de ângulos congruentes módulo 2π. Já para $z = 0$, como $r = 0$, o ângulo φ não influencia na expressão: $0 = 0(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ é sempre verdade.

Exemplo

A forma polar do conjugado $\overline{z}$ é

$$\overline{z} = r(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)).$$

A forma polar do oposto $-z$ é

$$-z = -r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r(\cos(\pi+\varphi) + i\sin(\pi+\varphi)).$$

A forma polar do inverso z^{-1} é

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{r(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))}{r^2} = \frac{1}{r}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)).$$

Definição

Chamamos de argumento principal de $z \neq 0$, denotado $Arg(z)$, o número real

$$Arg(z) = \begin{cases} \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & \text{se } y \geq 0,\ x^2+y^2>0, \\ -\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & \text{se } y < 0. \end{cases}$$

Chamamos de argumento de $z \neq 0$, denotado $arg(z)$, o conjunto

$$arg(z) = \{Arg(z) + 2k\pi; \quad k \in \mathbb{Z}\}.$$

Observe que $arg(0)$ não é definido, assim como $Arg(0)$.

Observe também que $Arg(z)$ é o único elemento do conjunto $arg(z)$ que pertence ao intervalo $(-\pi, \pi]$.

O módulo e argumento se relacionam à parte real e imaginária por

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \cos\varphi = \frac{x}{r} \\ \sin\varphi = \frac{y}{r} \end{cases}$$

Cuidado com arctan

Prof. Vanderley Ferreira - 2021

É comum usar a fórmula $\varphi = \arctan(y/x)$, obtida dividindo as equações do lado esquerdo para obter $y/x = \tan(\varphi)$.

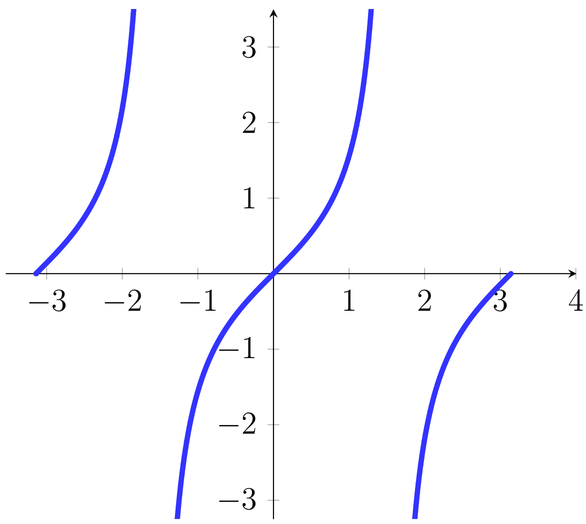
Há dois problemas em usar essa equação: o primeiro é que o ângulo não está definido onde $x = 0$ (caso z imaginário puro).

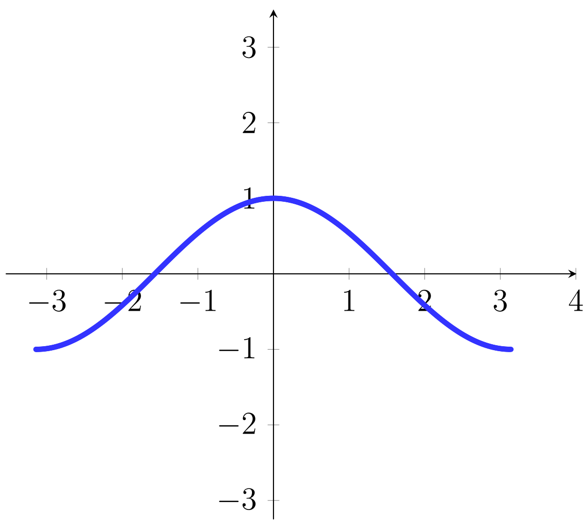
A expressão

$$\cos\varphi = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

não apresenta esse problema: o denominador nunca é zero para $z \neq 0$.

O segundo problema é que há duas soluções no intervalo $(-\pi, \pi]$ para $\tan\varphi = \lambda$ e também para $\cos\varphi = \lambda$ para cada λ constante adequada escolhida.





Sempre precisamos de duas equações para encontrar o argumento correto, resolvendo o sistema

$$\begin{cases} \cos\varphi = x/r, \\ \sin\varphi = y/r. \end{cases}$$

A forma fechada para o argumento principal Arg usando arctan é

$$Arg(z) = \begin{cases} \arctan(y/x), & \text{se } x > 0, \\ \pi/2, & \text{se } x = 0,\ y > 0, \\ \pi + \arctan(y/x), & \text{se } x < 0,\ y \geq 0, \\ \arctan(y/x) - \pi, & \text{se } x < 0,\ y < 0, \\ -\pi/2, & \text{se } x = 0,\ y < 0. \end{cases}$$

1.5 Potências de números complexos

Dados dois números na forma polar $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ e $w = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$, seu produto tem forma polar

$$z\,w = (r\rho)(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)),$$

como pode ser verificado usando propriedades das funções sin e cos.

Tomando $z = w$ na igualdade anterior, vemos que $z^2 = r^2(\cos(2\varphi) + i\sin(2\varphi))$.

Repetindo o procedimento indutivamente, obtemos todas as potências inteiras positivas de z:

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Prof. Vanderley Ferreira - 2021

O ângulo $n\varphi$ não precisa ser o argumento principal de z^n, mesmo quando $\varphi = Arg(z)$: para n grande, $n\varphi$ sai do intervalo $(-\pi, \pi]$.

Temos o inverso z^{-1} de cada $z \neq 0$, defina

$$z^{-n} = (z^{-1})^n.$$

Em geral para n inteiro positivo,

$$z^{-n} = \frac{1}{r^n}(\cos n\varphi - i \sin n\varphi).$$

O próximo passo é definir potências racionais.

1.6 Raízes de números complexos

Queremos definir a raiz n-ésima do complexo z. Escrevendo z, w nas formas polares e pedindo que $w^n = z$, temos

$$\rho^n(\cos n\psi + i \sin n\psi) = r(\cos\varphi + i \sin\varphi).$$

Segue que $\rho = \sqrt[n]{r}$, isto é, o módulo da raiz é a raiz do módulo de z.
Temos também

$$\cos n\psi = \cos\varphi, \qquad \sin n\psi = \sin\varphi,$$

a solução dessas equações, válida para todo k inteiro, é

$$\psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}.$$

Definição

As n-ésimas raízes de $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $z \neq 0$, são

$$w_k = r^{1/n}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),$$

onde $k = 0,\ 1,\ \dots,\ n-1$.

A potência $z^{1/n}$ é o conjunto

$$z^{1/n} = \{w_k;\ k = 0,\ 1,\ \dots,\ n-1\}.$$

Definimos $0^{1/n} = \{0\}$.

Definição

A n-ésima raiz principal de $z \neq 0$ é

$$\sqrt[n]{z} = r^{1/n}\left(\cos\frac{Arg(z)}{n} + i\sin\frac{Arg(z)}{n}\right),$$

definida usando o argumento principal de z.

Definimos $\sqrt[n]{0} = 0$.

Observe que a raiz principal é única para cada z.

Exemplo

Raiz quadrada de -1.

Como $Arg(-1) = \pi$ e $|-1| = 1$, temos

$$(-1)^{1/2} = \left\{\cos\frac{\pi + 2k\pi}{2} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{2},\ k = 0, 1\right\} = \{i,\ -i\}.$$

Por outro lado

$$\sqrt{-1} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i.$$

Exemplo

Raiz cúbica de -1.

Como $Arg(-1) = \pi$ e $|-1| = 1$, temos

$$(-1)^{1/3} = \left\{ \cos \frac{\pi + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{3},\ k = 0, 1, 2 \right\} =$$

$$= \left\{ \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}, \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}, \cos \pi + i \sin \pi \right\}.$$

Por outro lado

$$\sqrt[3]{-1} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Prof. Vanderley Ferreira - 2021

2 Noções de topologia no plano complexo

Funções reais são definidas em intervalos ou na união de intervalos disjuntos. Alguns teoremas falam de funções definidas em um intervalo limitado fechado, outros falam sobre intervalos abertos.

Como funções complexas serão definidas em regiões do plano, os domínios tem propriedades novas relacionadas à forma e conexão entre os pontos. Essas características são estudadas na Topologia.

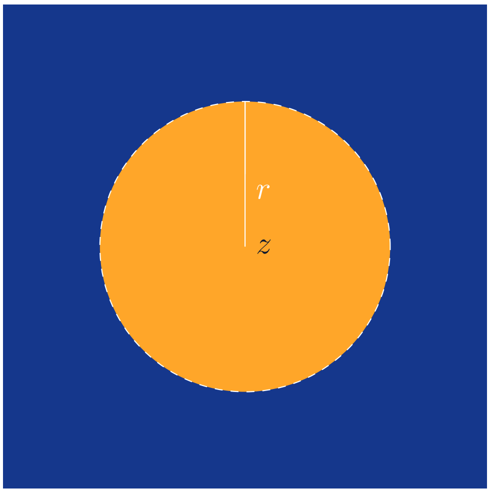
Essa seção traz uma lista inicial dos conceitos topológicos que vão aparecer no curso.

2.1 Conjuntos abertos

Definição

O disco aberto de centro z e raio r é o conjunto

$$D_r(z) = \{w \in \mathbb{C}; \quad |z - w| < r\}.$$



Definição

Uma vizinhança de $z \in \mathbb{C}$ é um conjunto V que contém um disco centrado em z.

Dizemos que z é ponto interior de V.

Definição

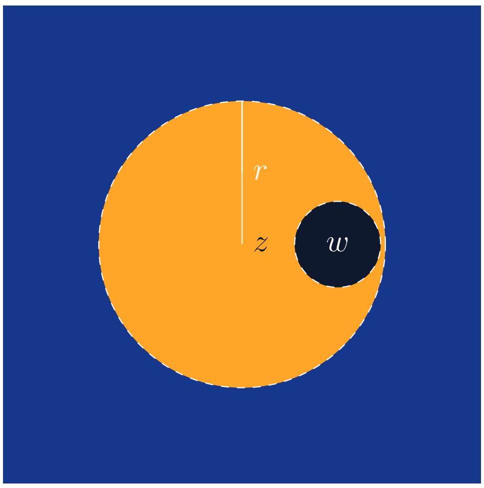
Um conjunto U é aberto quando contém um disco centrado em cada ponto $z \in U$.

Exemplo

O disco aberto $D_r(z)$ é um conjunto aberto.

Dado w com $|z - w| < r$, tome $\rho = r - |z - w| > 0$.

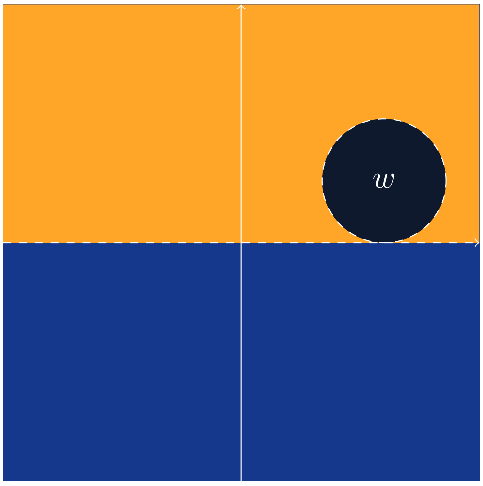
A desigualdade triangular mostra que $D_\rho(w) \subset D_r(z)$.



Exemplo

O semiplano $H = \{z = x + yi; \quad y > 0\}$ é aberto:

Dado $z = x + yi$ com $y > 0$, podemos tomar o raio $r = y$, e $D_r(z) \subset H$.



2.2 Conjuntos fechados

Definição

Um ponto de fronteira do conjunto V é um ponto $z \in \mathbb{C}$ tal que *todo* disco $D_r(z)$ contém pontos de V e pontos fora de V.

Prof. Vanderley Ferreira - 2021

Definição

A fronteira de V é o conjunto de todos os pontos de fronteira de V.

Definição

Um conjunto F é fechado quando o seu complementar $\mathbb{C}\backslash F$ é aberto.

Conjuntos fechados são aqueles que contém todos os seus pontos de fronteira.

F não ser aberto NÃO significa que F é fechado.

Exemplo

Todo disco fechado $\{z;\ |z-z_0|\leq r\}$ é fechado.

De fato, o complementar do disco fechado $\{|z-z_0|\leq r\}$ é

$$\mathbb{C}\backslash\{|z-z_0|\leq r\}=\{|z-z_0|>r\},$$

isto é, o exterior do disco.

Para ver que o exterior é um conjunto aberto, tome qualquer ponto z_1 com $|z_1-z_0|>r$, um círculo centrado em z_1 com raio $|z_1-z_0|-r$ está todo contido no exterior.

Como seu complementar é aberto,

$$\{|z-z_0|\leq r\}$$

é fechado.

Exemplo

O círculo

$$|z - i| = 3$$

é fechado.

O complementar do círculo $|z - i| = 3$ é o conjunto $|z - i| \neq 3$, que é formado por duas regiões: o disco aberto de centro i e raio 3 (que já vimos que é aberto) e o exterior do disco fechado de centro i e raio 3, que vimos acima que é aberto.

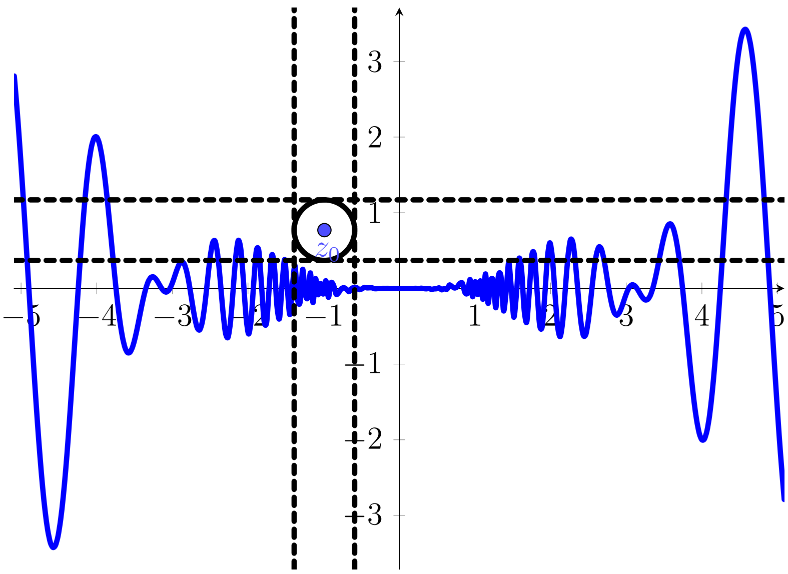
Logo o círculo é fechado (seu complementar é união de dois abertos).

Exemplo

Uma reta é um conjunto fechado. Mais geralmente, se f é uma função real contínua, seu gráfico (o conjunto $\{t + if(t);\ t \in \mathbb{R}\}$) é um conjunto fechado.

O complementar da reta ou do gráfico é composto de duas regiões, acima e abaixo do gráfico: $\{x + iy;\ y > f(x)\}$ e $\{x + iy;\ y < f(x)\}$.

Para verificar que elas são abertas usamos a continuidade da função, conforme a figura.

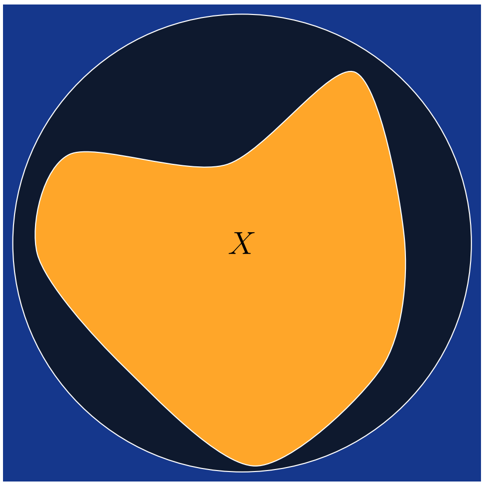


No disco em torno de z_0, é mantido o sinal de $y - f(x)$.

Prof. Vanderley Ferreira - 2021

Definição

Um conjunto X é limitado quando ele está contido em algum disco.



Um conjunto aberto pode ser limitado (como o disco aberto) ou não (como o semi-plano), da mesma forma um conjunto fechado pode ou não ser limitado.

Mas professor...

Um conjunto pode ser aberto e fechado?