Funções de Variável Complexa

Semana 12

Sumário

9.3 Série de Taylor

Pela fórmula de Cauchy sabemos que uma função f analítica possui derivadas $f^{(n)}$ para todo n natural.

Definição

A série de Taylor da função f analítica em $z_0 \in \mathbb{C}$ é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n.$$

Teorema

Teorema de Taylor

Se D é um aberto, f é analítica em D e $z_0 \in D$, então

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n,$$

para todo z no maior disco $|z-z_0| < R$ que está inteiramente contido em D.

O que o teorema de Taylor diz é que a série de Taylor de uma função converge para a função original.

Uma consequência desse resultado é que a o raio de convergência da série pode ser calculado encontrando a distância do centro até a fronteira do conjunto onde f é analítica.

Exemplo

Escreva a série de Taylor da função $1/(z+2)$ em torno de $z=i$.

Vamos escrever uma série geométrica para o quociente, usando a forma $c/(1-w)$:

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{2+z-i+i}=\frac{1}{2+i-(-(z-i))}=\frac{1}{2+i}\frac{1}{1-(-(z-i)/(2+i))}.$$

Tomando $c=1/(2+i)$ e $w=-(z-i)/(2+i)$, reconhecemos a série

$$\frac{1}{z+2}=c\frac{1}{1-w}=c\sum_{n=0}^{\infty}w^n=\frac{1}{2+i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2+i)^n}(z-i)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2+i)^{n+1}}(z-i)^n.$$

O raio de convergência dessa série é a distância de $z=i$ até o ponto onde a função deixa de ser analítica, nesse caso -2. Portanto o raio de convergência é $|i+2|=\sqrt{5}$.

Exemplo

Algumas séries de Taylor familiares

$$\exp(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n, \qquad \exp(-z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}z^n,$$

$$\sin(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(1+2n)!}z^{1+2n}, \qquad \sinh(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1+2n)!}z^{1+2n},$$

$$\cos(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}, \qquad \cosh(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}z^{2n}.$$

Como no cálculo real, a série da exponencial vem da sua equação diferencial $\exp'=\exp$ que permite encontrar os coeficientes recursivamente.

Usando a série de $\exp(z)$ e $\exp(-z)$ você encontra as de seno e cosseno hiperbólicos, usando $\pm iz$ você encontra as outras duas.

Como sabemos que as funções são inteiras, as séries convergem uniformemente (localmente) e podemos somar os coeficientes.

9.4 Série de Laurent

A série de Taylor permite escrever uma função como série de potências na vizinhança de um ponto onde ela é analítica.

A série de Laurent permite expressar uma função como série de potências quando o domínio tem buracos, como por exemplo em torno de um ponto singular, ao custo de usar séries com potências negativas.

Definição

Sejam $f : D \to \mathbb{C}$ e $z_0 \in \mathbb{C}$.

Dizemos que z_0 é uma singularidade isolada de f quando f é analítica em D e D contém um anel da forma

$$0 < |z - z_0| < r,$$

para algum $r > 0$.

Em outras palavras, z_0 é analítica em todos os pontos em uma vizinhança de z_0, exceto possivelmente no próprio ponto z_0.

Para a função $1/z$ o ponto $z = 0$ é uma singularidade isolada.

As singularidades de $\mathrm{Log}(z)$ não são isoladas, pois para cada $a \in (-\infty, 0]$ o disco $|z - a| < r$ sempre contém o intervalo $(-r + a, a)$ onde a função não é analítica.

Prof. Vanderley Ferreira - 2021

Definição

Uma série de Laurent centrada em z_0 é a soma

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}.$$

A parte regular da série de Laurent é

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

A parte singular, ou principal, da série de Laurent é

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}.$$

Dizemos que a série converge em z quando a parte regular e a parte singular convergem no ponto z.

O anel de convergência da série de Laurent é o maior conjunto

$$r < |z-z_0| < R,$$

onde $r \geq 0$, $R > 0$ ou $R = \infty$ onde a série converge.

Os coeficientes que aparecem na série são um pouco diferentes das sequências que definimos, precisaríamos pensar em uma sequência definida nos inteiros, $a : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$. É mais fácil e instrutivo pensar na série de Laurent como a soma de duas séries normais, a parte regular e a parte principal, em que cada uma é definida por uma sequência.

Exemplo

$$1/z$$

Vimos que a série de $1/z$ centrada em $z = 1$ é a série geométrica

$$\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} z^{n+1},$$

válida no disco $|z - 1| < 1$. Essa é uma série de Laurent com parte singular nula.

Já escolhendo como centro $z = 0$ temos a série simples

$$\frac{1}{z} = \cdots + \frac{0}{z^2} + \frac{1}{z} + 0 + 0z + \cdots$$

com a parte regular nula e parte principal finita.

Podemos calcular a série de Laurent centrada em qualquer ponto, não necessariamente pontos onde a função tem singularidade.

O único requisito é que a função seja analítica em um anel centrado no ponto. No entanto as séries interessantes são justamente aquelas centradas em pontos singulares.

Teorema

Teorema de laurent

Se $r \in [0, \infty)$, $R \in (0, \infty)$ ou $R = \infty$ e f é analítica em $r < |z - z_0| < R$, então

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

para todo z no anel $r < |z - z_0| < R$. Os coeficientes da série de Laurent de f são

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw,$$

para n inteiro, onde γ é um caminho simples e fechado no anel $r < |z - z_0| < R$.

O caminho mais simples que podemos tomar na série de Laurent de f é um círculo centrado em z_0 de raio $\rho \in (r, R)$.

A fórmula integral para os coeficientes de Laurent não é usada na prática, exceto como último recurso. Usualmente vamos manipular séries conhecidas, principalmente a série geométrica e as séries de Taylor de funções elementares.

Quando f é analítica em $|z - z_0| < R$, a sua série de Laurent é apenas a sua série de Taylor: de fato, para n natural positivo, o coeficiente a_{-n} é

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w - z_0)^{-n+1}} dw = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(w)(w - z_0)^{n-1} dw,$$

a função sendo integrada $f(w)(w - z_0)^{n-1}$ é analítica no disco todo, portanto do teorema de Cauchy a integral é nula.

Nesse caso os coeficientes da parte regular da série de Laurent são os coeficientes de Taylor:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},$$

pela segunda fórmula de Cauchy.

Dessa forma, a série de Laurent é uma extensão da série de Taylor a novas funções.

Exemplo

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-4)}.$$

Vamos encontrar as séries de Laurent de f centradas em 0.

A função f deixa de ser analítica apenas nos pontos $z = -1$ e $z = 4$. Assim f é analítica nos discos

$$|z| < 1,$$

$$1 < |z| < 4,$$

Prof. Vanderley Ferreira - 2021

$$4 < |z|.$$

Vamos encontrar a série válida em cada um deles.

Escrevendo f usando frações parciais

$$f(z) = \frac{1}{5}\frac{1}{z-4} - \frac{1}{5}\frac{1}{z+1}.$$

No disco $|z| < 1$ escrevemos as duas frações como séries geométricas,

$$f(z) = -\frac{1}{20}\frac{1}{1-z/4} - \frac{1}{5}\frac{1}{z+1} = -\frac{1}{20}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{4^n} - \frac{1}{5}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n z^n,$$

finalmente

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{20\,4^n} - \frac{(-1)^n}{5}\right)z^n,$$

uma série de Taylor (lembre que nesse disco f é analítica).

No anel $1 < |z| < 4$ uma das séries geométricas ainda é válida, mas a outra diverge. Vamos escrever $1/(1+z)$ agora como uma série de potências de $1/z$, pois para $|z| > 1$, $|1/z| < 1$.

Escreva $w = 1/z$ e

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z}\frac{1}{1+1/z} = w\frac{1}{1-(-w)} = w\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n w^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}w^n.$$

Juntando as séries,

$$f(z) = -\frac{1}{20}\frac{1}{1-z/4} - \frac{1}{5}\frac{1}{z+1} = -\frac{1}{20}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{4^n} - \frac{1}{5}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}z^{-n},$$

que fornece

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n,$$

com

$$a_n = \begin{cases} -\dfrac{1}{20}\dfrac{1}{4^n}, & n \geq 0, \\[2ex] \dfrac{(-1)^{-n}}{5}, & n < 0. \end{cases}$$

No anel $|z| > 4$ a outra série geométrica precisa ser consertada. Vamos escrever $1/(1-z/4)$ agora como uma série de potências de $4/z$, pois para $|z| > 4$, $|4/z| < 1$.

Prof. Vanderley Ferreira - 2021

Escreva $w = 4/z$, $z = 4/w$ e

$$\frac{1}{1 - z/4} = -\frac{4}{z}\frac{1}{1 - 4/z} = -w\frac{1}{1 - w} = -w\sum_{n=0}^{\infty} w^n = -\sum_{n=1}^{\infty} w^n.$$

Juntando as séries,

$$f(z) = -\frac{1}{20}\frac{1}{1 - z/4} - \frac{1}{5}\frac{1}{z + 1} = \frac{1}{20}\sum_{n=1}^{\infty} 4^n z^{-n} - \frac{1}{5}\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} z^{-n},$$

que fornece

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{20} 4^n - \frac{1}{5}(-1)^{n-1} \right) z^{-n}.$$

Note que essa série tem parte regular nula.

Prof. Vanderley Ferreira - 2021