Funções de Variável Complexa

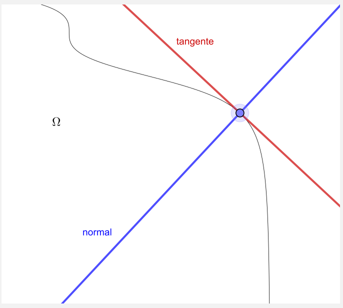
Sumário

7.3 Mais sobre a equação de Laplace

Para concluir a discussão de aplicações de funções conformes vamos cobrir outras condições de contorno para a equação de Laplace e escoamento plano de fluidos ideais.

Exemplo

A condição de contorno
$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0,$$
é chamada condição de Neumann. Como estamos trabalhando no plano, a função ψ tem derivadas parciais em duas direções independentes. Na fronteira, as direções importantes são a direção tangente e a direção normal, na condição de Neumann impomos que a derivada normal é nula.



Nos modelos, uma condição de Neumann prescreve o fluxo na fronteira, ela pode representar que aquela parte da fronteira está em equilíbrio com o meio externo, seja de temperatura ou concentração.

O problema com condição de Neumann em toda a fronteira é simples – a solução é ψ constante. Precisamos combinar a condição de Neumann e Dirichlet para produzir problemas com solução não-trivial, chamamos esse tipo de problema de misto.

Exemplo

Considere o problema

$$\begin{cases} \Delta\psi(x,y) = 0, & y > 0, \\ \psi(x,0) = 0, & x < 0, \\ \psi_y(x,0) = 0, & 0 < x < \varepsilon, \\ \psi(x,0) = 1, & x > \varepsilon. \end{cases}$$

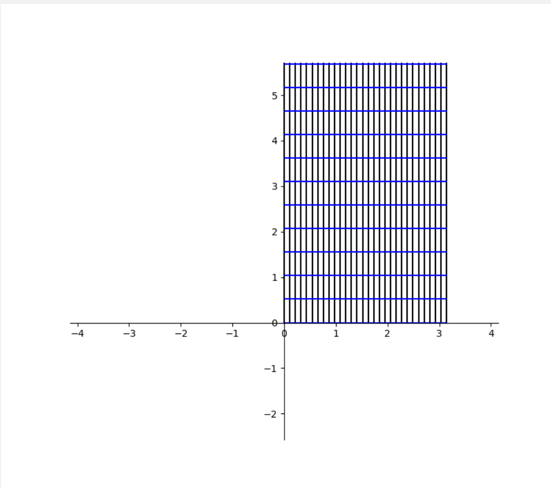
Observe que na fronteira do semiplano a direção normal é a direção y e a direção tangencial é a direção x, assim $\frac{\partial\psi}{\partial n} = \psi_y$.

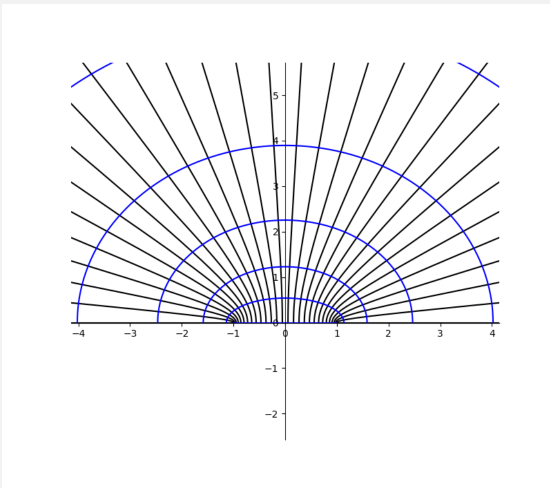
A condição de fronteira descreve dois segmentos mantidos a temperaturas constantes diferentes, ligados por um pequeno segmento onde calor é trocado livremente. Essa folga permite obter uma solução contínua até o contorno.

A solução desse problema fica mais aparente mudando o domínio. Queremos passar para um problema de valor de contorno na faixa $S = \{0 < x < \pi,\ y > 0\} = (0,\pi) \times (0,\infty)$.

A transformação cosseno transforma um domínio no formato de S no semiplano, assim vamos usar a transformação inversa

$$w = \arccos\left(-\frac{z}{\varepsilon}\right).$$





Nosso problema é transformado por $w = u + iv$ em

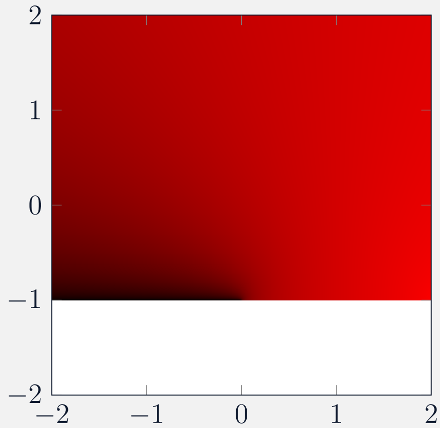
$$\begin{cases} \Delta\Psi(u,v) = 0, & 0 < u < \pi,\ v > 0, \\ \psi(0,v) = 0, & v > 0, \\ \psi_v(u,0) = 0, & 0 < u < \pi, \\ \psi(\pi,v) = 1, & v > 0. \end{cases}$$

Uma função que é constante na variável v cumpre os requisitos das três condições de contorno ao mesmo tempo: ela é constante nas paredes verticais e tem derivada normal zero na parede horizontal.

Para ter $\Psi(u,v) = \Psi(u)$ harmônica, necessariamente $\Psi_{uu} = 0$, isto é, Ψ é um polinômio de grau um na variável u. Daqui impondo as condições de contorno obtemos

$$\Psi(u,v) = \frac{u}{\pi}.$$

Como antes precisamos traduzir a solução para coordenadas xy (exercício). Compare a solução com a do primeiro problema que analisamos.



Exemplo

Considere o problema de valor de contorno na faixa

$$\begin{cases} \Delta\psi(x,y) = 0, \quad 0 < y < 1, \\ \psi(x,0) = T_0, \\ \psi(x,1) = T_1. \end{cases}$$

Podemos passar para um problema no semiplano superior transformando a fronteira através da função exp que leva retas horizontais em semirretas partindo da origem. Para a reta $y = 0$ ir para o eixo positivo e a reta $y = 1$ ir no eixo negativo ($\arg z = \pi$), precisamos usar

$$w = \exp(\pi z), \qquad u = e^x \cos(\pi y), \; v = e^x \sin(\pi y).$$

O problema correspondente é

$$\begin{cases} \Delta\Psi(u,v) = 0, \quad v > 0, \\ \Psi(u,0) = T_0, \quad u > 0 \\ \Psi(u,0) = T_1, \quad u < 0. \end{cases}$$

Já temos a solução desse problema que é

$$\Psi(u,v) = T_0 + \frac{T_1 - T_0}{\pi} Arg(u + iv).$$

Traduzindo para coordenadas originais, temos

$$\psi(x,y) = T_0 + \frac{T_1 - T_0}{\pi} Arg(\exp(\pi(x + iy))) = T_0 + (T_1 - T_0)y.$$

Podemos usar funções conformes para mudar o domínio D onde o problema de valor de contorno é posto. Embora possa ser difícil construir essa função, sabemos que ela sempre existe: esse resultado é o teorema a seguir.

Teorema

Teorema da representação conforme de Riemann

Se $D \subset \mathbb{C}$ é simplesmente conexo e $D \neq \mathbb{C}$, então existe uma função conforme bijetora $f : D \to \{|z| < 1\}$.

O teorema não nos dá uma receita para construir a função que transforma D em um círculo. Não há um método geral para encontrar essa função, por isso os exemplos onde a solução é conhecida são importantes.

Como são muitos casos para lembrar, tabelas de transformações conformes facilitam o trabalho (a tabela usualmente acompanha o livro).

Exemplo de tabela.

Exemplo

O núcleo de Poisson no semiplano.

As condições de contorno que usamos são bastante restritas – funções constantes por partes e condição de contorno de Neumann homogênea.

A fórmula de Poisson permite escrever a solução de um problema de valor de contorno em função da condição no bordo, para uma função β qualquer. No semiplano, a solução do problema

$$\begin{cases} \Delta\psi = 0 \\ \psi|_{\partial\Omega} = \beta \end{cases}$$

é

$$\psi(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{y\,\beta(t)}{(x - t)^2 + y^2} dt.$$

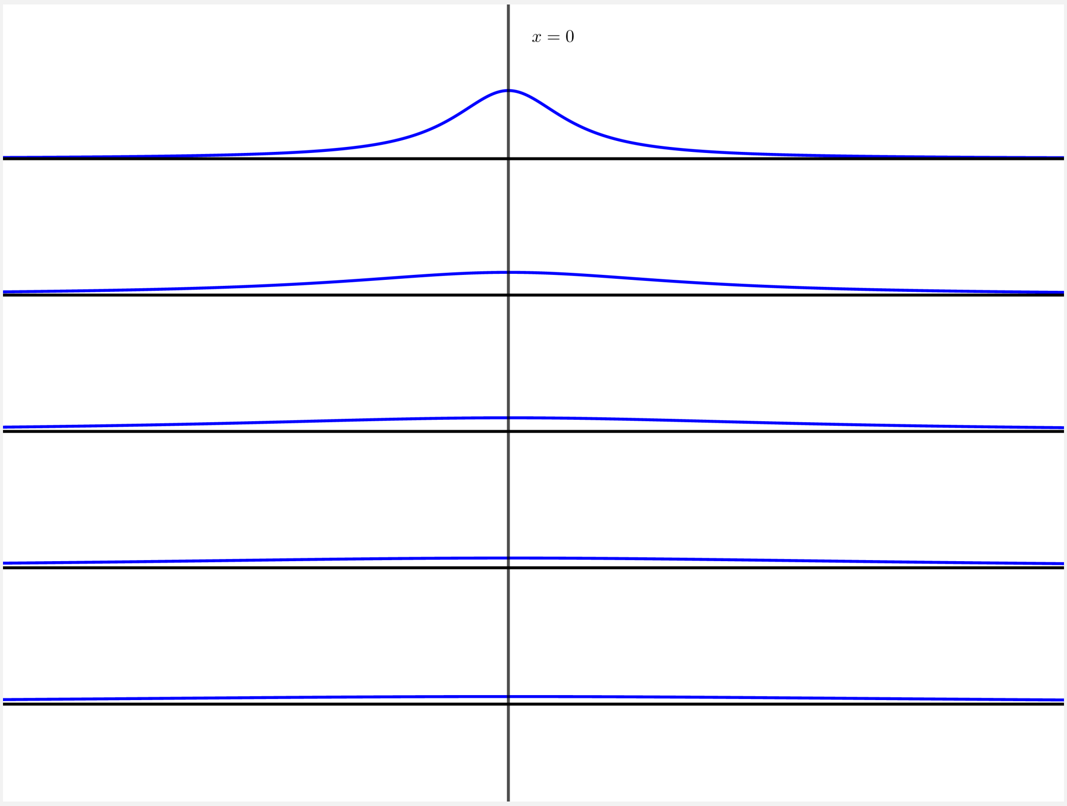
A função β multiplicada por um peso, que depende de x, y, é integrada ao longo da fronteira para obter o valor da solução em cada ponto.

A solução da equação de Laplace é, em certo sentido, a média ponderada dos valores no bordo com peso da média variando conforme a posição no domínio.

A função peso

$$K(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

é conhecida como **núcleo de Poisson** e é específica do problema de valor de contorno (esse é o núcleo do semiespaço com condição de contorno de Dirichlet). A figura mostra o núcleo para $x = 0$ e diferentes valores de $y = 1, 3, 5, 7, 9$. Observe que quando y vai para 0 a função se concentra.



Exemplo

O núcleo de Poisson no disco.

Fórmulas como acima são chamadas fórmulas de representação da solução. Encontrar o núcleo de Poisson em diferentes domínios é um problema muito difícil. Podemos usar uma transformação conforme para transformar um problema em outro domínio para um problema no semiplano, onde então aplicamos a fórmula de Poisson.

Aplicando esse processo para o círculo, obtemos a fórmula de representação para o problema

que é

$$\psi(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\beta(\exp(it))(1-\sqrt{x^2+y^2})}{|\exp(it)-(x+iy)|^2}dt.$$

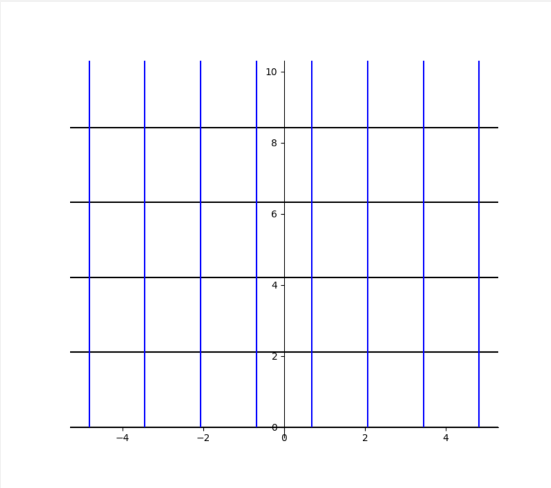
A integral usualmente não pode ser resolvida em termo de funções elementares - salvo em poucos casos que costumam aparecer na lista de exercícios. Por outro lado podemos integrar numericamente para aproximar a solução.

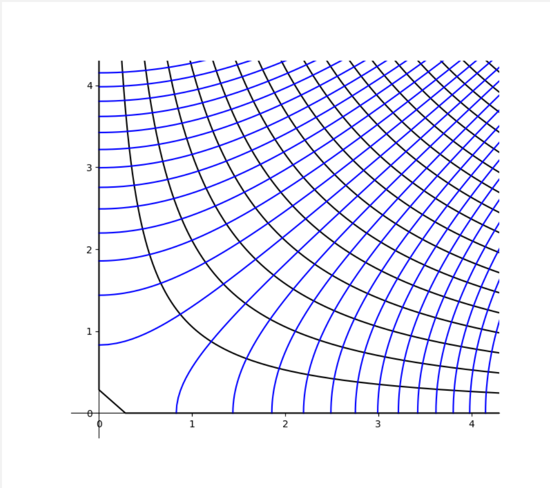
Prof. Vanderley Ferreira - 2021

7.4 Polígonos e a transformação de Christoffel-Schwarz

A função que transforma o semiplano superior em um polígono.

A transformação $\sqrt{z}$ transforma o semiplano superior no primeiro quadrante.





Quando aplicamos transformações do tipo potência z^{α} produzimos cantos no domínio: o ponto $z = 0$ passa a ser um vértice com ângulo interno $\alpha\pi$. A função é conforme em todo o semiplano superior, ela só deixa de ser conforme no vértice e no corte (que ficam na fronteira).

Combinando funções desse tipo podemos transformar o semiplano superior em um polígono arbitrário.

Definição

A transformação de Christoffel-Schwarz é definida por

$$f(z) = a \int_{z_0}^{z} (s - x_1)^{-\alpha_1} (s - x_2)^{-\alpha_2} \dots (s - x_{n-1})^{-\alpha_{n-1}} ds + b.$$

Aqui x_j são pontos no eixo real que escolhemos para sermos mapeados nos vértices w_j, α_j vem dos ângulos do polígono:

$\pi\alpha_j$ é o ângulo externo no vértice w_j,

z_0 é um ponto arbitrário escolhido no plano superior e a, b ajustam a posição e tamanho do polígono.

Mas professor...

Ainda não definimos integral. Por que tem uma integral no capítulo?

Excelente observação.

O ponto principal que usaremos é que vale o teorema fundamental do cálculo e a derivada de f é o termo dentro da integral, isto é,

$$f'(z) = a\,(z - x_1)^{-\alpha_1} (z - x_2)^{-\alpha_2} \dots (z - x_{n-1})^{-\alpha_{n-1}},$$

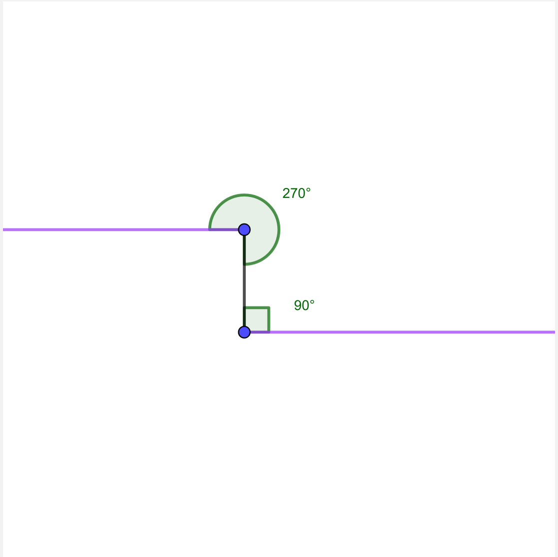
essa função nunca se anula no semiplano superior – portanto f é conforme dentro do domínio.

Em geral a integral que define a transformação não pode ser resolvida em termos de funções elementares, assim não precisamos nos precisar em calcular a integral.

Exemplo

Degrau.

Considere um canal que tem um degrau ortogonal conforme ilustrado, o nosso domínio é o aberto acima da curva. Vamos analisar a transformação de C-S que "endireita" o domínio, transformando-o no semiplano.



Vamos fixar coordenadas, assumir que os vértices estão em $(0,0)$ e $(0,-1)$.

O domínio desse problema não é um polígono no sentido que estamos acostumados, uma região convexa limitada por segmentos de reta. A transformação funciona nessa classe de domínios, que chamaremos polígonos degenerados.

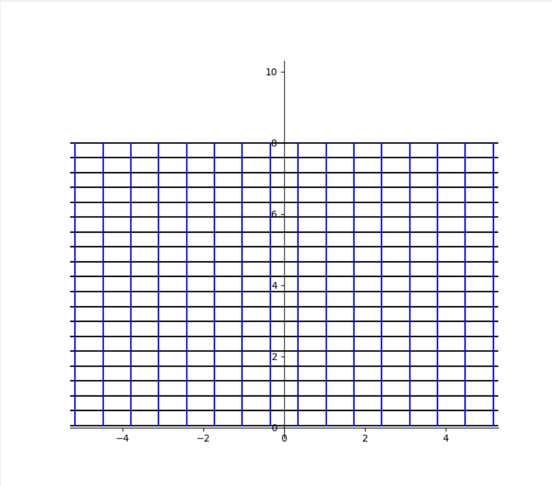
Vamos considerar os pontos $x_1 = -1$ e $x_2 = +1$ na fronteira do semiplano sendo mapeados nos pontos $w_1 = (0,0)$ e $w_2 = (0,-1)$. Substituindo na transformação, temos

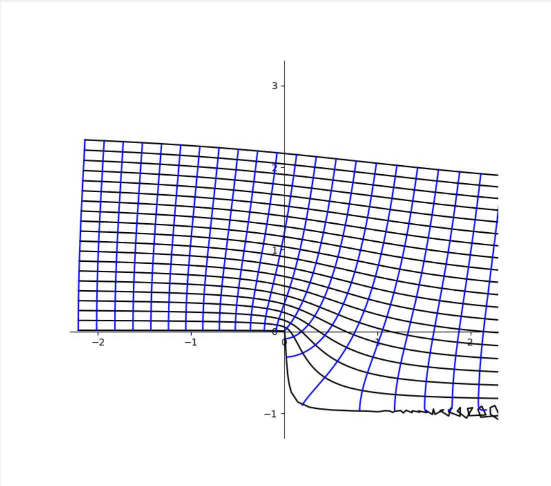
$$f(z) = a\int_{z_0}^{z} (s+1)^{-\alpha_1}(s-1)^{-\alpha_2}ds + b.$$

Os ângulos externos são $-\pi/2$ e $+\pi/2$, a igualdade $\pi\alpha_j =$ângulo externo em w_j nos dá

$$f(z) = a\int_{z_0}^{z} (s+1)^{1/2}(s-1)^{-1/2}ds + b.$$

Escolhendo $z_0 = -1$ acertamos que $f(-1) = 0$ e $b = 0$. Basta então escolher a escala e posição usando a.





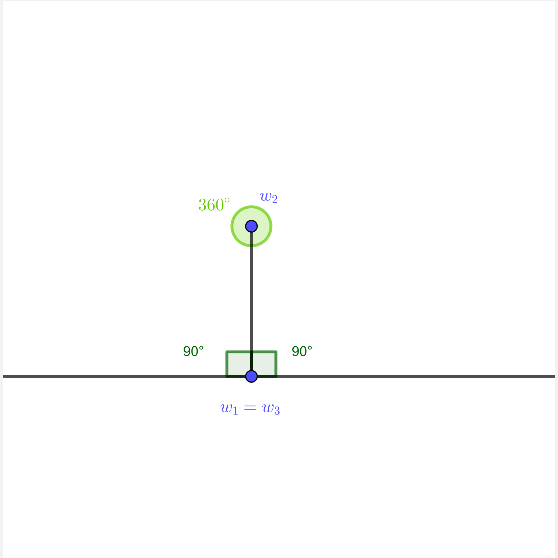
Essa função tem primitiva, mas ela não ajuda muito. Integração numérica dá uma noção da transformação, ela foi usada na produção da imagem acima (observe que acontece uma instabilidade no canto direito inferior da imagem, ela não vem da transformação e sim da aproximação).

Podemos ver que a transformação não afeta muito pontos lnoge da fronteira, mas perto do degrau acontecem grandes deformações.

Exemplo

Obstáculo vertical.

Considere o problema do fluxo em um canal com um obstáculo no fundo, conforme mostrado na figura.



Vamos fixar coordenadas, assumir que os vértices estão em $(0,0)$ e $(0,-1)$.

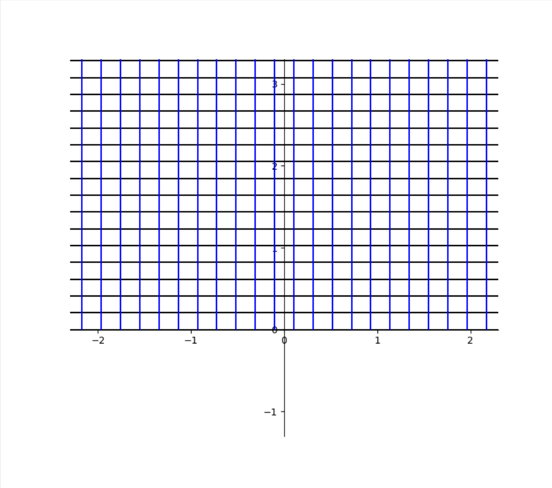
Vamos considerar os pontos $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ e $x_3 = +1$ na fronteira do semiplano sendo mapeados nos pontos $w_1 = (0,0)$, $w_2 = (0,1)$ e $w_3 = (0,0)$. Substituindo na transformação, temos

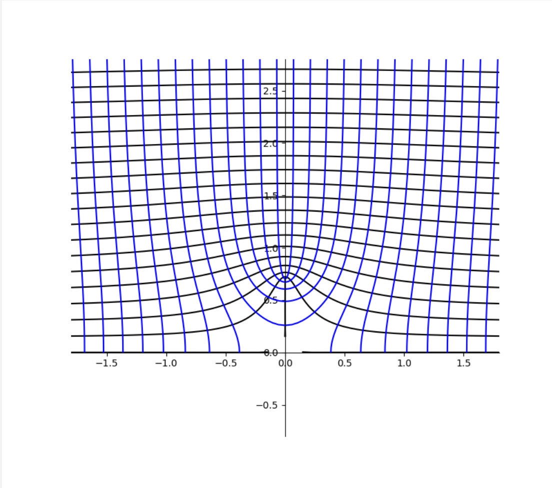
$$f(z) = a\int_{z_0}^{z} (s+1)^{-\alpha_1}\, s^{-\alpha_2}(2-1)^{-\alpha_3} ds + b.$$

Os ângulos externos são $\pi/2$, $-\pi$ e $+\pi/2$, ficamos com a função

$$f(z) = a\int_{z_0}^{z} (s+1)^{-1/2} s(s-1)^{-1/2} ds + b.$$

Escolhendo $z_0 = -1$ acertamos que $f(-1) = 0$ e $b = 0$. Basta então escolher a escala e posição usando a.





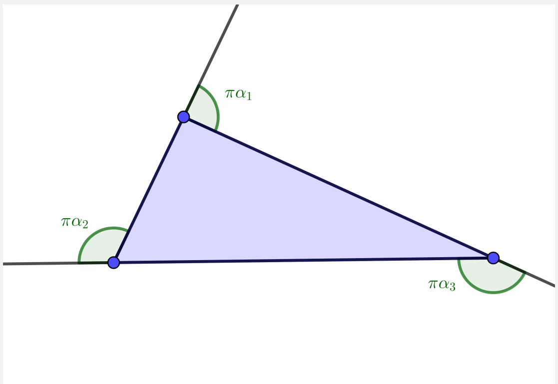
A função desse exemplo possui integral elementar,

$$f(z) = \sqrt{z-1}\sqrt{z+1}.$$

Exemplo

Triângulo

Considere o problema do fluxo em um canal com um obstáculo conforme mostrado na figura.



Quando o polígono é limitado podemos usar um dos x_j como ∞, e considerar um ponto a menos na integral. Vamos escolher os pontos $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$ obtendo

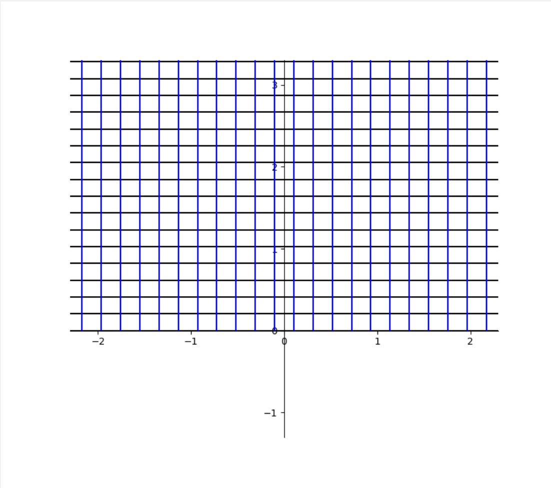
$$f(z) = a \int_{z_0}^{z} s^{-\alpha_1/\pi} (s-1)^{-\alpha_2/\pi} \, ds + b.$$

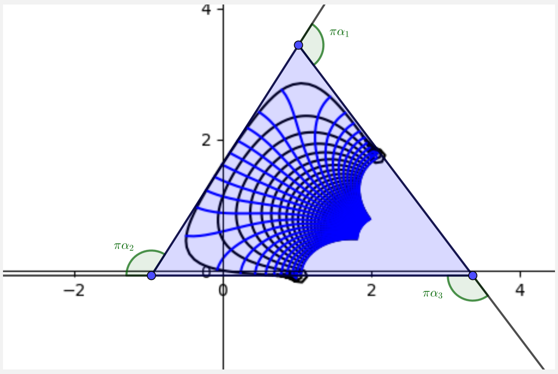
Exemplo

Triângulo equilátero

No caso de três ângulos iguais, temos os ângulos externos de $2\pi/3$ e podemos escolher $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, que fornece a transformação

$$f(z) = a\int_1^z \frac{ds}{(s-1)^{2/3}(s+1)^{2/3}} + b.$$





Mesmo esse caso não possui primitiva elementar. O objetivo em problemas envolvendo a transformação de Schwarz-Christoffel em geral é escolher os coeficientes a, b e o ponto z_0 convenientemente de modo a produzir o polígono exato em que estamos interessados.

Limitações do método

Encontramos soluções do problema de Dirichlet parta a equação de Laplace em um aberto Ω - nos exemplos que vimos o aberto podia ser um círculo ou semiplano.

Desde que tenhamos uma transformação conforme do semiplano superior para um aberto, podemos aplicar o método. No entanto nem sempre é possível exibir a transformação (ela sempre existe, conforme o teorema da representação conforme).

A segunda limitação é que precisamos de um núcleo diferente para cada condição de contorno, ou combinação delas.

A terceira limitação é que só podemos resolver problemas no plano, não é possível usar funções conformes em dimensões mais altas.

Por fim, embora a equação de Laplace apareça nas aplicações mais diversas, ela é só uma equação - não temos como abordar por exemplo a equação do calor.

7.5 Funções conformes e fluidos ideais

Uma função analítica Ω pode ser interpretada como um campo de vetores bidimensional.

Quando Ω é uma função analítica, o campo $\overline{\Omega}'$ modela a velocidade no escoamento plano de um fluido ideal.

Chamamos de linhas de corrente as soluções de

$$Im(\overline{\Omega(z)}) = c$$

para c constante real.

Mas professor...

Por que o conjugado da derivada de uma função complexa analítica é o campo de velocidades de um fluido ideal?

Como de costume, ótima pergunta. Não vamos entrar nos detalhes, mas confira a seção 5.6 da referência principal [Zill].

A ideia é que a condição para um escoamento irrotacional é muito similar às equações de Cauchy-Riemann, apenas com uma diferença de sinais: daí vem o conjugado.

Exemplo

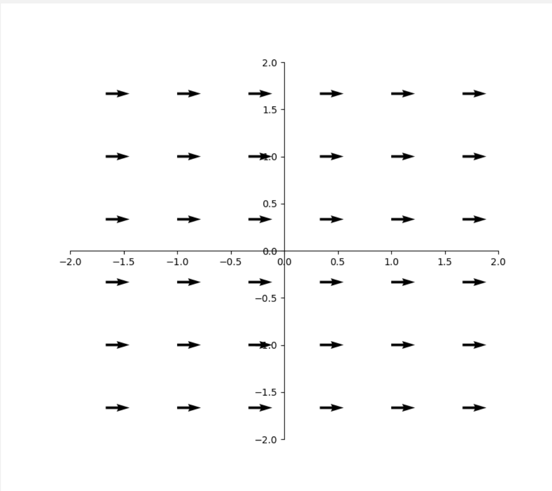
A função

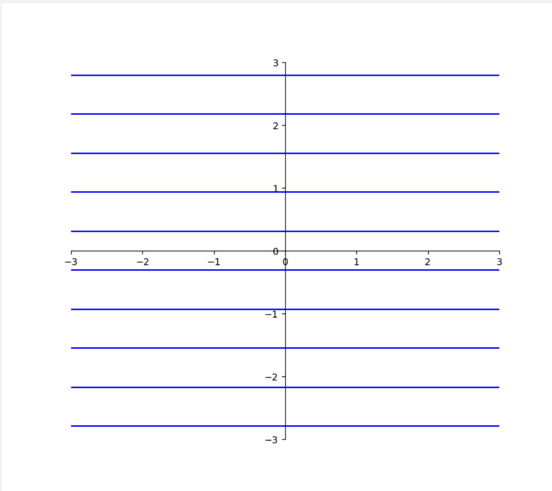
$$\Omega(z) = Az, \quad A > 0$$

é conforme em $\mathbb{C}$. Sua derivada é constante

$$\overline{\Omega'(z)} = (A, 0),$$

esse potencial corresponde ao **escoamento uniforme** na direção horizontal.





A velocidade é constante em todos os pontos. As linhas de corrente são obtidas resolvendo a equação

$$Im(\overline{\Omega(z)}) = c,$$

que nese caso é

$$Ay = c, \quad \Leftrightarrow y = c/A,$$

retas horizontais.

Exemplo

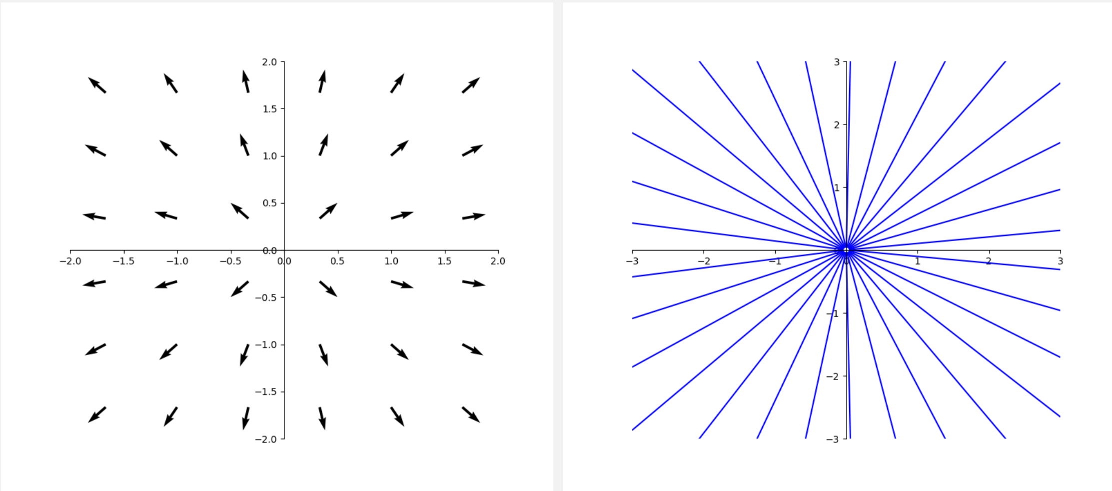
A função

$$\Omega(z) = k\overline{Log(z - z_0)}, \quad k \in \mathbb{R},$$

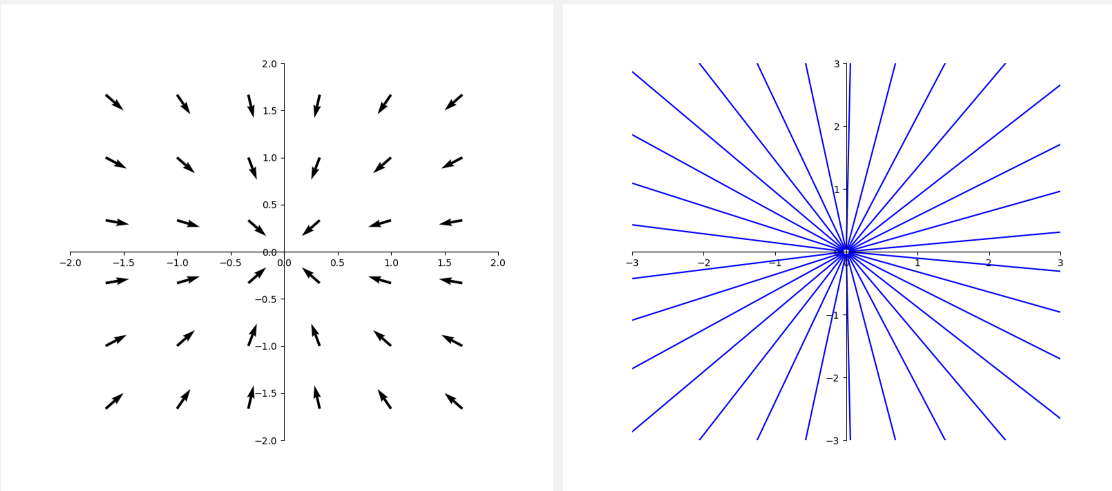
modela uma fonte ou sorvedouro. Sua conjugada $\overline{\Omega}$ é conforme em todo ponto onde é analítica, sua derivada é

$$\overline{\Omega'(z)} = \frac{k}{z - z_0},$$

esse potencial é chamado de **fonte**.



As linhas de corrente são semirretas que se encontram no centro z_0, o sentido do escoamento depende de k. Para $k > 0$ temos uma fonte e as linhas divergem, para $k < 0$ temos linhas convergindo para o centro.



Exemplo

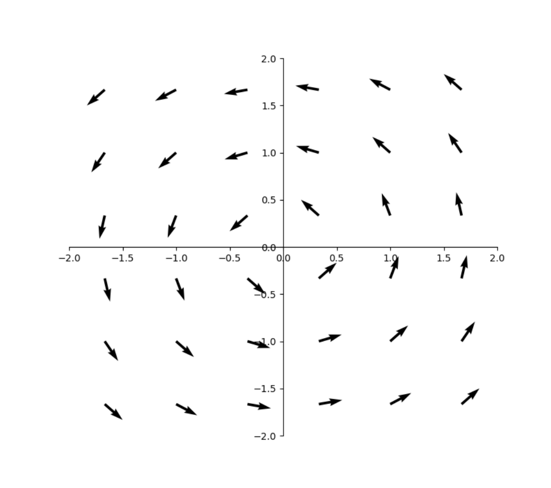
A função

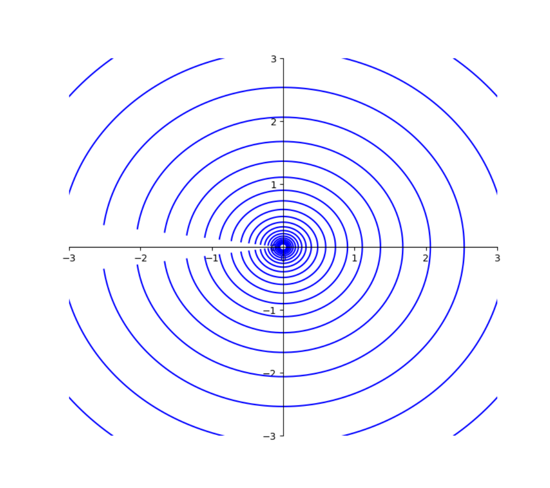
$$\Omega(z) = ik\overline{Log(z - z_0)}, \quad k \in \mathbb{R},$$

modela um vórtice. Sua conjugada $\overline{\Omega}$ é conforme em todo ponto onde é analítica, sua derivada é

$$\overline{\Omega'(z)} = \frac{ik}{z - z_0},$$

esse potencial é chamado de **fonte**.





As linhas de corrente são círculos com centro z_0, o sentido do escoamento depende de k. Para $k > 0$ temos escoamento no sentido horário, e para $k < 0$ antihorário.

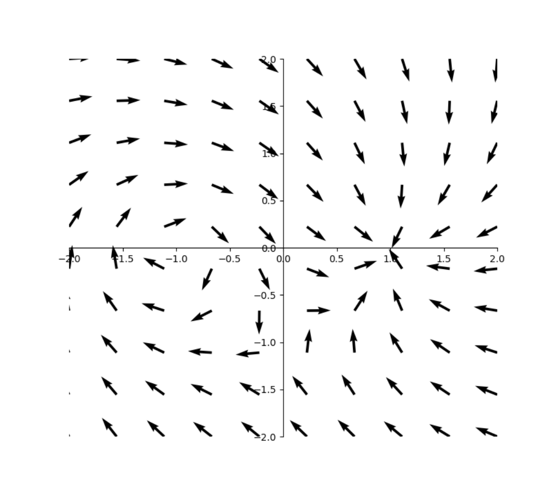
Os escoamentos básicos são compostos para modelar problemas mais complexos. Usamos também a imagem desses potenciais básicos através de uma função conforme para encontrar o escoamento em outros domínios.

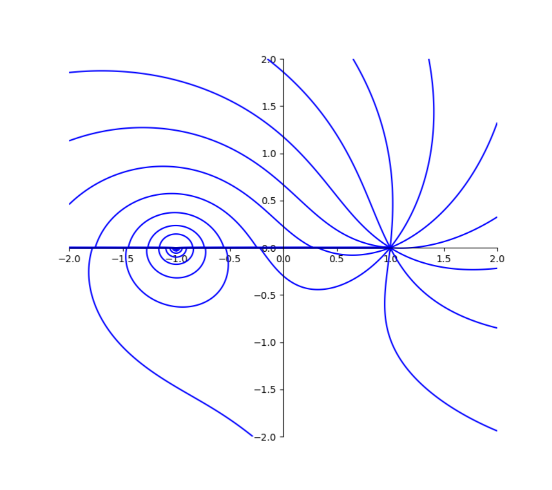
Prof. Vanderley Ferreira - 2021

Exemplo

O escoamento com um sorvedouro em $z = 1$ e um vórtice em $z = -1$ é modelado pelo potencial

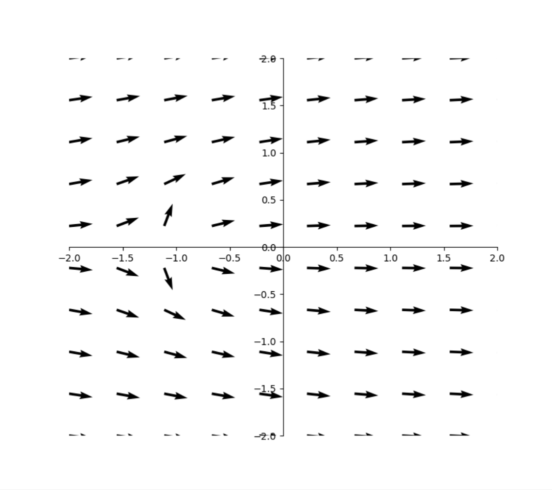
$$i\,Log(z+1) + Log(z-1).$$

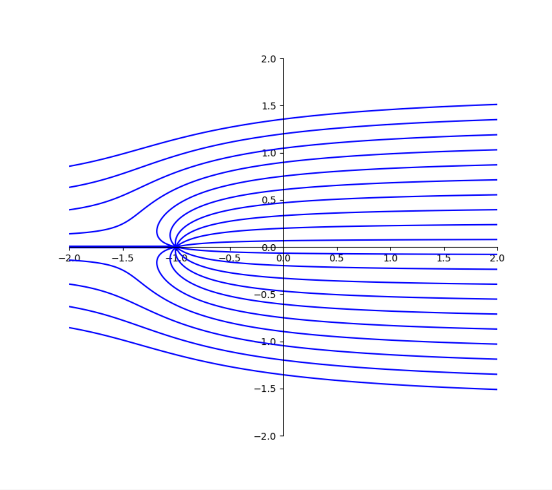




Exemplo

Combinando um escoamento uniforme com uma fonte em $z = -1$ obtemos o escoamento





modelado pelo potencial

$$3z + Log(z+1).$$

Exemplo

Se você voltar aos exemplos da transformação de Christoffel-Schwarz, as curvas em preto representam linhas de corrente de um escoamento uniforme no interior do polígono.

Em geral, quando temos uma transformação conforme $f : H \to D$, do semiplano superior para um aberto D que estamos estudando, as linhas de corrente do escoamento no domínio D são as curvas de nível de $Im(f)$.

Exemplo

Encontre as linhas de corrente do escoamento em volta de um cilindro.

Considere o escoamento no domínio

$$D = \{x + iy;\ y > 0, \quad x^2 + y^2 > 1\},$$

queremos descrever um escoamento uniforme em D, representado em branco a seguir.

Inspecionando a tabela de transformações conformes, a função

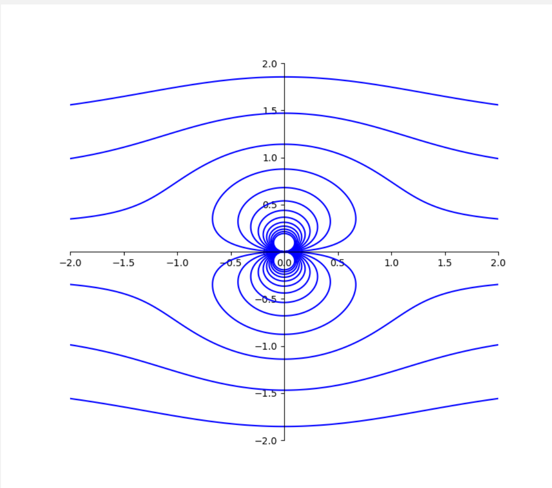
$$w = z + \frac{1}{z}$$

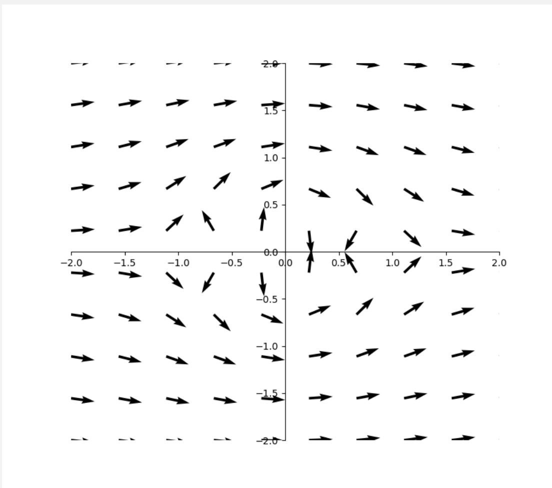
transforma D no semiplano superior $H = \{y > 0\}$.

Assim a o escoamento uniforme em H tem linhas de corrente

$$Im(z + 1/z) = c, \qquad y - \frac{y}{x^2 + y^2} = c.$$

As linhas de corrente relevantes são aquelas dentro do domínio, isto é, no semiplano superior e fora do círculo unitário.





Prof. Vanderley Ferreira - 2021