Aplicações da Diagonalização

Álgebra Linear (MAT-27)

Ronaldo Rodrigues Pelá

IEFF-ITA

21 de outubro de 2011

Roteiro

1. Diagonalização e Cônicas
2. Potências de uma Matriz
3. Exponencial de Matrizes

Roteiro

1. Diagonalização e Cônicas
2. Potências de uma Matriz
3. Exponencial de Matrizes

Introdução

- Considere a equação de uma cônica:

Forma Geral

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

sendo A, B, C, D, E, F números reais.

- Se $B \neq 0$ o reconhecimento da cônica não é nada trivial.
- O procedimento usual aprendido em Geometria Analítica consiste em fazer uma cautelosa rotação de eixos de um ângulo θ tal que, no novo sistema, não se tenha o termo cruzado xy.
- Vamos atacar este problema de outro modo.

Inserindo Matrizes

- Veja que:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

$$Dx + Ey = \begin{bmatrix} D & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

- Lembramos ainda que se $u = (x, y)$ é um vetor genérico do $\mathbb{R}^2$, então:

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

onde $\mathcal{B} = \{(1,0); (0,1)\}$ é a base canônica do $\mathbb{R}^2$

Inserindo Matrizes

- Reescrevendo

$$[u]_{\mathcal{B}}^T \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix} [u]_{\mathcal{B}} + \begin{bmatrix} D & E \end{bmatrix} [u]_{\mathcal{B}} + [F] = [0].$$

- O principal problema de reconhecer qual o tipo de cônica está no fato de B não ser necessariamente zero.
- Entretanto, se diagonalizarmos a matriz 2×2, esse problema será eliminado. Seja P a seguinte matriz:

$$P = \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix}.$$

Buscando os autovetores

- Como P é simétrica ela é sempre diagonalizável
- Além disso, pelo Teorema Espectral, é possível encontrar uma base *ortonormal* de autovetores de P.
- Seja M a matriz formada pelas coordenadas destes autovetores de P (que formam uma base ortonormal).
- Assim:
$$M^{-1}PM = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2).$$
- Sabemos que M é ortogonal (pois é uma matriz de mudança de base entre bases ortonormais) e, por isso,
$$M^T PM = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2).$$

Diagonalizando

- Ou seja, fazendo uma mudança de base no $\mathbb{R}^2$, da base $\mathcal{B}$ para uma base $\mathcal{C}$, tal que M seja a matriz de mudança de base $M_{\mathcal{BC}}$, teremos:

$$[u]_{\mathcal{B}} = M[u]_{\mathcal{C}}$$

$$[u]_{\mathcal{C}}^T M^T \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix} M[u]_{\mathcal{C}} + \begin{bmatrix} D & E \end{bmatrix} M[u]_{\mathcal{C}} + [F] = [0],$$

$$[u]_{\mathcal{C}}^T \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} [u]_{\mathcal{C}} + \begin{bmatrix} D & E \end{bmatrix} M[u]_{\mathcal{C}} + [F] = [0].$$

Finalizando o problema

- Definindo agora:

$$[u]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} D & E \end{bmatrix} M = \begin{bmatrix} \tilde{D} & \tilde{E} \end{bmatrix},$$

$$\lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2 + \tilde{D}\tilde{x} + \tilde{E}\tilde{y} + F = 0.$$

- Nesta forma é possível reconhecer a cônica de um modo bem mais tranqüilo.

Exemplos

- Identifique a cônica descrita pela equação:

$$-7x^2 + 6xy + y^2 + \sqrt{10}x - \sqrt{10}y - 8 = 0.$$

Exemplos

- Resolução

$$-7x^2 + 6xy + y^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

- Sendo P a matriz 2×2 anterior, temos a equaação característica de P

$$\lambda^2 + 6\lambda - 16 = 0,$$

- Portanto $\lambda_1 = -8$ e $\lambda_2 = 2$

Exemplos

- Autovetores associado a λ_1: basta resolver
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$
Um autovetor (já normalizado) é:
$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$
- Autovetores associado a λ_2: basta resolver
$$\begin{bmatrix} -9 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$
Um autovetor (já normalizado) é:
$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Exemplos

- Assim, definimos $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$ como:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix}$$

- Sendo M a matriz 2×2 anterior, temos:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix},$$

- Lembrando que M é ortogonal, podemos escrever:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{x} & \tilde{y} \end{bmatrix} M^T = \begin{bmatrix} \tilde{x} & \tilde{y} \end{bmatrix} M^{-1},$$

Exemplos

- de modo que:

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \tilde{x} & \tilde{y} \end{bmatrix} M^{-1} \begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix}, \\
&= \begin{bmatrix} \tilde{x} & \tilde{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix}, \\
&= -8\tilde{x}^2 + 2\tilde{y}^2.
\end{aligned}
$$

Exemplos

- Da mesma forma:

$$\begin{aligned}
\sqrt{10}x - \sqrt{10}y &= \begin{bmatrix} \sqrt{10} & -\sqrt{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sqrt{10} & -\sqrt{10} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} \\
&= 4\tilde{x} - 2\tilde{y}.
\end{aligned}$$

Exemplos

- A nova equação escrita em termos de $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$ fica:

$$-8\tilde{x}^2 + 4\tilde{x} + 2\tilde{y}^2 - 2\tilde{y} - 8 = 0,$$

- Rearranjando um pouco:

$$-8\left(\tilde{x} - \frac{1}{4}\right)^2 + 2\left(\tilde{y} - \frac{1}{2}\right)^2 - 8 = 0,$$

- Trata-se de uma *hipérbole*.

Roteiro

1. Diagonalização e Cônicas
2. Potências de uma Matriz
3. Exponencial de Matrizes

Introdução

- Seja $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.
- É fácil notar que

Potência de uma matriz diagonal

$$D^p = \mathrm{diag}(\lambda_1^p, \dots, \lambda_n^p) \quad \forall p \in \mathbb{N}^*$$

- Se D é inversível (nenhum λ_i é nulo), isto vale para todo p inteiro.
- É fácil elevar uma matriz diagonal a uma certa potência.
- Mas se a matriz não for diagonal, isto pode não ser tão fácil. Vejamos o que fazer se a matriz for diagonalizável.

Teorema

- Sejam A, D, $M \in M_n(K)$, com M inversível, de modo que:

$$A = MDM^{-1}$$

então

Potência de uma matriz

$$A^p = MD^pM^{-1} \quad \forall p \in \mathbb{N}^*$$

- Se A é inversível, o teorema fica válido também para p negativo.
- É vantajoso aplicar este teorema quando D é uma matriz diagonal.

Prova

- Indução: para $p = 1$, não há o que provar (hipótese inicial).
- Se
$$A^p = MD^pM^{-1}$$
então
$$A^{p+1} = MD^pM^{-1}(MDM^{-1}) = MD^{p+1}M^{-1}$$

Roteiro

1 Diagonalização e Cônicas

2 Potências de uma Matriz

3 Exponencial de Matrizes

Introdução

- Consideremos uma sequência $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots$ de matrizes reais (ou complexas) de ordem $m \times n$
- Suponhamos $A_k = (a_{ij}^{(k)}) \quad k = 1, 2, \ldots$
- Dizemos que a sequência dada converge para uma matriz $B = (b_{ij})$ de mesmo tipo se as sequências de números reais (ou complexos)

$$a_{ij}^{(1)}, a_{ij}^{(2)}, \ldots, a_{ij}^{(k)}, \ldots$$

convergem para b_{ij} para todo $i = 1, \ldots, m$ e todo $j = 1, \ldots, n$

Exemplo

- Por exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/9 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 1/n^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \cdots$$

converge para a matriz nula.

Série Exponencial

- Se a sequência $A_1, A_1 + A_2, A_1 + A_2 + A_3, \ldots$ convergir para a matriz B, dizemos que a série infinita $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ é convergente para a matriz B.
- Neste caso, a matriz B recebe o nome de soma da série.
- Pode-se provar que se $A \in M_n(\mathbb{C})$, então a série exponencial

$$I + A + \frac{A^2}{2!} + \ldots + \frac{A^p}{p!} + \ldots = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{A^p}{p!}$$

  é convergente.
- O resultado desta série é e^A e, em geral, é difícil de ser obtido.

Série Exponencial

- Se A é uma matriz diagonalizável, então e^A pode ser obtido de um modo “relativamente” simples.
- Veja que $A = MDM^{-1}$ e também $A^p = MD^pM^{-1}$.

$$e^A = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{A^p}{p!} = \sum_{p=0}^{\infty} M \frac{D^p}{p!} M^{-1} = M \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{D^p}{p!} \right) M^{-1} = Me^D M^{-1}$$

- Se $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, então $e^D = \operatorname{diag}(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n})$
- Assim a diagonalização fornece um método eficaz de se obter a exponencial de uma matriz. Mas será o único?

Teorema de Cayley-Hamilton

Teorema de Cayley-Hamilton

Seja $A \in M_n(\mathbb{C})$ e seja

$$p_A(t) = (-1)^n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0$$

o polinômio característico de A. Então $p_A(A) = \mathbb{O}$, onde

$$p_A(A) = (-1)^n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I$$

- Este teorema não é difícil de ser provado para o caso em que A é diagonalizável, mas ele vale sempre.
- De uma forma sutil, ele nos revela que A^n pode ser escrita como uma combinação linear de $A^{n-1}, A^{n-2}, \ldots, A, I$ (o mesmo valendo para potências A^p para $p \geq n$).

Fórmula de Interpolação de Sylvester

Fórmula de Interpolação de Sylvester

Seja $A \in M_n(\mathbb{C})$ com autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ com respectivas multiplicidades $m_1, m_2, \ldots, m_p$. Se f é uma função "bem comportada", sabe-se que, por consequência do Teorema de Cayley-Hamilton, $f(A)$ admite uma representação polinomial em A. Digamos, que $f(A)$ possa ser escrita como

$$g(A) = \alpha_{n-1}A^{n-1} + \ldots + \alpha_1 A + \alpha_0 I$$

Em geral os coeficientes $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ são desconhecidos. Mas eles podem ser calculados através da relação:

$$f^{(k)}(\lambda_j) = g^{(k)}(\lambda_j) \quad k = 0, 1, \ldots, m_j - 1 \quad j = 1, \ldots, p$$

Exemplos

- Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Obtenha e^A
- Método 1: Usando a diagonalização, temos

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Assim

$$e^A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^2+1 & e^2-1 \\ e^2-1 & e^2+1 \end{bmatrix}$$

Exemplos

- Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Obtenha e^A
- Método 2: Usando a fórmula de interpolação de Sylvester
  Autovalores de A: $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 2$ com $m_1 = m_2 = 1$.
  Temos $f(A) = e^A$ e $g(A) = \alpha A + \beta I$. Assim:

$$\begin{cases} f(\lambda_1) = g(\lambda_1) \\ f(\lambda_2) = g(\lambda_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = \beta \\ e^2 = 2\alpha + \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = (e^2 - 1)/2 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

Por fim:

$$e^A = \frac{e^2 - 1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^2 + 1 & e^2 - 1 \\ e^2 - 1 & e^2 + 1 \end{bmatrix}$$

Exemplos

- Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Obtenha e^A
- Neste caso, A não é diagonalizável. Devemos usar a fórmula de interpolação de Sylvester

Autovalores de A: $\lambda_1 = 1$ com $m_1 = 2$.
Temos $f(A) = e^A$ e $g(A) = \alpha A + \beta I$. Assim:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(\lambda_1) = g(\lambda_1) \\ f'(\lambda_1) = g'(\lambda_1) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} e = \alpha + \beta \\ e = \alpha \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = e \\ \beta = 0 \end{array} \right.$$

Por fim:

$$e^A = e \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & e \\ 0 & e \end{bmatrix}$$