Forma Canônica de Jordan

Álgebra Linear (MAT-27)

Ronaldo Rodrigues Pelá

IEFF-ITA

4 de novembro de 2011

Roteiro

Roteiro

Matrizes "Quase" Diagonalizáveis

- Nem toda matriz de $M_n(\mathbb{C})$ é diagonalizável.
- Nem todo operador $T : V \to V$ é diagonalizável.

Ideia

Dada uma matriz A, encontrar uma matriz M de modo que $M^{-1}AM$ seja o mais próximo possível de uma diagonal.

- No caso mais simples, quando A é diagonalizável, basta tomar os autovetores para formar as colunas de M e com isso $M^{-1}AM$ é perfeitamente diagonal.
- Mas num caso geral, podem faltar autovetores e uma forma diagonal se torna impossível **(vamos nos ocupar deste caso agora)**.

Roteiro

Convenção Inicial

- Estaremos trabalhando sobre o corpo $\mathbb{C}$.
- Em $\mathbb{R}$, uma parte dos resultados que veremos é válida, mas nem todos.
- Mas por que então trabalhar em $\mathbb{C}$, se o "mundo é real"? Por várias razões:
  - Um número real pode ser entendido como um "caso particular de número complexo".
  - Um polinômio real sempre admite raiz complexa, mas nem sempre admite raiz real.

Forma Canônica de Jordan

- Se uma matriz A tem s autovetores LI, então ela é semelhante a uma matriz J que está na forma canônica de Jordan, com s blocos na diagonal.

Forma Canônica de Jordan

$$J = M^{-1}AM = \begin{bmatrix} J_1 & \bar{0} & \bar{0} & \dots & \bar{0} \\ \bar{0} & J_2 & \bar{0} & \dots & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & J_3 & \dots & \bar{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \dots & J_s \end{bmatrix}$$

Bloco de Jordan

- Cada bloco possui um autovetor, um autovalor e números 1 bem acima da diagonal

Bloco de Jordan

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

Exemplo

$$J = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad J = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Autovalor duplo $\lambda_1 = 8$ com um autovetor associado $u_1 = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$ ao qual corresponde o bloco J_1.
- Autovalor triplo $\lambda_2 = 0$ com dois autovetores associados u_3 e u_5 aos quais correspondem os blocos de Jordan J_2 e J_3.
- Se J tivesse cinco autovetores (LI), todos os blocos seriam 1×1 e J seria diagonal.

Questão

- Se A é uma matriz 5×5, sob que condições a sua forma canônica de Jordan será este mesmo J?

$$J = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Em outras palavras: quando existirá um M tal que $M^{-1}AM = J$?
- Primeiro requisito: A deve compartilhar os mesmos autovalores $8, 8, 0, 0, 0$.
- Mas a matriz diagonal com estes autovalores não é similar a J !

Buscando a resposta

- Reescrevendo $M^{-1}AM = J$ como $AM = MJ$:

$$A\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 1 & & & \\ 0 & 8 & & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & 0 & 0 & \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

- Resolvendo as multiplicações, uma coluna por vez:

$$Ax_1 = 8x_1 \qquad Ax_2 = 8x_2 + x_1$$

$$Ax_3 = 0x_3 \qquad Ax_4 = 0x_4 + x_3 \qquad Ax_5 = 0x_5$$

Resposta

$$Ax_1 = 8x_1 \qquad Ax_2 = 8x_2 + x_1$$

$$Ax_3 = 0x_3 \qquad Ax_4 = 0x_4 + x_3 \qquad Ax_5 = 0x_5$$

- Agora podemos reconhecer as condições:
  1. A deve ter três autovetores genuínos: x_1, x_3 e x_5 associados aos autovalores 8, 0 e 0.
  2. A deve ter dois autovetores generalizados: x_2 e x_4 associados aos autovalores 8 e 0. Note que:

$$(A - 8I)x_2 = x_1 \qquad (A - 0I)x_4 = x_3$$

Roteiro

Autovetores generalizados

- O aparecimento de x_2 e x_4 no exemplo anterior nos motiva a redefinir o conceito de autovetor.

Autovetor generalizado

Dada uma matriz $A \in M_n(\mathbb{C})$ e um autovalor λ, uma matriz coluna não nula $x \in M_{n\times 1}(\mathbb{C})$ é um autovetor generalizado de ordem k associado a λ quando $(A - \lambda I)^k x = \mathbb{O}$ e $(A - \lambda I)^{k-1} x \neq \mathbb{O}$

- Nota: um autovetor genuíno é um autovetor generalizado de ordem 1.

Cadeia de autovetores generalizados

- Seja $v^{(k)}$ um autovetor generalizado de ordem k associado a λ:

$$(A-\lambda I)^k v^{(k)} = \mathbb{O} \qquad (A-\lambda I)^{k-1} v^{(k)} \neq \mathbb{O}$$

- Considere $v^{(k-1)} = (A-\lambda I)v^{(k)}$. Assim:

$$(A-\lambda I)^{k-1} v^{(k-1)} = \mathbb{O} \qquad (A-\lambda I)^{k-2} v^{(k-1)} \neq \mathbb{O}$$

- $v^{(k-1)}$ é autovetor generalizado de ordem $k-1$.

Cadeia de autovetores generalizados

- Dado um $v^{(k)}$ autovetor generalizado de ordem k associado a λ, é possível construir uma cadeia de autovetores generalizados de ordem menor que k:

$$\{v^{(k)}, v^{(k-1)}, \ldots, v^{(1)}\}$$

$$v^{(j)} = (A - \lambda I)v^{(j+1)} \qquad j = k-1, k-2, \ldots, 1$$

- Indutivamente, prova-se que os outros vetores da cadeia são autovetores generalizados.
- Note que $v^{(1)}$ é um autovetor genuíno!
- Pode-se mostrar com relativa facilidade que a cadeia é LI.

Receita para obter a Forma Canônica de Jordan

- Considere uma matriz $A \in M_n(\mathbb{C})$.
- Obtenha os seus autovalores: $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ (contados sem multiplicidade).
- Obtenha seus autovetores: $u_1, \ldots, u_r$.
- Caso mais simples: se há n autovetores LI, então A é diagonalizável, sua forma canônica de Jordan é

$$J = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

A matriz

$$M = [u_1 \quad \ldots u_n],$$

formada pelos autovetores de A, é tal que $M^{-1}AM = J$.

Receita para obter a Forma Canônica de Jordan

- Suponha agora que A não é diagonalizável.
- Considere um caso complicado: um autovalor λ cuja multiplicidade geométrica q é menor que a algébrica m.
- Existe um conjunto $x_{\lambda,1}^{(1)}, \ldots, x_{\lambda,q}^{(1)}$ de autovetores (genuínos) LI.
- Precisamos obter os $m - q$ autovetores generalizados (não genuínos).
- Na verdade, precisamos obter todas as cadeias de autovetores generalizados.

Receita para obter a Forma Canônica de Jordan

- Para tanto, para cada autovetor $x^{(1)}_{\lambda,j}$ associado a este λ, tente resolver $(A-\lambda I)x^{(2)}_{\lambda,j} = x^{(1)}_{\lambda,j}$.
- Se não for possível, pare e tente novamente para outro autovetor.
- Mas se for possível, você encontrou um autovetor generalizado de ordem 2.
- Para este $x^{(2)}_{\lambda,j}$, tente resolver novamente $(A-\lambda I)x^{(3)}_{\lambda,j} = x^{(2)}_{\lambda,j}$ e prossiga enquanto for possível.
- Você deverá achar uma cadeia de k autovetores generalizados. Associada a esta cadeia, teremos um bloco de Jordan de tamanho k.

Receita para obter a Forma Canônica de Jordan

- Vamos construir agora a matriz M tal que $M^{-1}AM = J$.
- Em analogia com o caso em que A é diagonalizável, inferimos que M deve ser constituída pelos autovetores genuínos e generalizados.
- Relembrando: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ são os autovalores de A.
- Cada autovalor tem multiplicidade algébrica m_i e multiplicidade geométrica q_i, mas agora isto não é o mais importante para construir M.
- Cada autovalor λ_i tem r_i cadeias de autovetores generalizados: $C_{\lambda_i,1}, C_{\lambda_i,2}, \ldots, C_{\lambda_i,r_i}$.
- Cada cadeia $C_{\lambda_i,j}$ tem $k_{i,j}$ autovetores generalizados.

Receita para obter a Forma Canônica de Jordan

$$C_{\lambda_{i,j}} = [x^{(1)}_{\lambda_{i,j}} \quad x^{(2)}_{\lambda_{i,j}} \quad \dots \quad x^{(k_{i,j})}_{\lambda_{i,j}}]$$
$$M = [C_{\lambda_{1,1}} \quad \dots \quad C_{\lambda_{1,r_1}} \quad \dots \quad C_{\lambda_{p,r_p}}]$$

- Assim: $M^{-1}AM = J$, onde J é

$$J = \begin{bmatrix} J_{\lambda_{1,1}} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & J_{\lambda_{1,r_1}} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & J_{\lambda_{p,r_p}} \end{bmatrix}$$

- Cada $J_{\lambda_{i,j}}$ é uma bloco de Jordan $k_{i,j} \times k_{i,j}$.

Aviso

Atenção

O professor adverte: usar a inteligência é melhor que seguir este algoritmo...

Coisas importantes

- Número de blocos de Jordan = número de autovetores LI.
- Associado ao mesmo autovalor, pode haver mais de um bloco de Jordan (com tamanhos que, em princípio, podem ser diferentes).
- Associado a uma certa cadeia de autovetores generalizados de comprimento k, temos um bloco de Jordan de tamanho k.
- Um autovalor pode ter mais de uma cadeia de autovetores generalizados (com tamanhos diferentes, inclusive).

Semelhança de Matrizes

Teorema

Duas matrizes A e B de $M_n(\mathbb{C})$ são semelhantes se e somente se suas formas canônicas de Jordan forem iguais, a menos possivelmente do posicionamento dos blocos.

Roteiro

Polinômio característico

- Seja $p_A(t)$ o polinômio característico da matriz A ($n \times n$).
- Já vimos (teorema de Cayley-Hamilton) que:

$$p_A(A) = \mathbb{O}$$

- p_A é um polinômio de grau n.
- Será que existe um polinômio m_A de grau menor que n tal que:

$$m_A(A) = \mathbb{O}?$$

- A resposta é: sim, em muitos casos. Veja o caso das matrizes Identidade e Nula.
- Este polinômio é conhecido como polinômio mínimo. Vejamos como obtê-lo a partir da forma canônica de Jordan.

Polinômio mínimo

- Conhecidos os autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ (contados sem multiplicidade) da matriz A, o polinômio mínimo de A é:

$$m_A(t) = \prod_{i=1}^{p} (\lambda_i - t)^{\bar{n}_i}$$

  onde $\bar{n}_i$ é o tamanho do maior bloco de Jordan associado a λ_i.
- Usando a forma canônica de Jordan de A, segue que:

$$m_A(A) = \mathbb{O}$$

- Note que as potências neste polinômio anulam todos os blocos de Jordan de A e, por isso, $m_A(A) = \mathbb{O}$.

Exemplo

- As matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- Têm o mesmo polinômio característico

$$p(\lambda) = (3-\lambda)^3$$

- Mas diferentes polinômios mínimos:

$$m_A(\lambda) = (3-\lambda) \quad m_B(\lambda) = (3-\lambda)^2 \quad m_C(\lambda) = (3-\lambda)^3$$

Exemplo

- As matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- Têm o mesmo polinômio característico

$$p(\lambda) = (3 - \lambda)^5$$

- E também o mesmo polinômio mínimo:

$$m(\lambda) = (3 - \lambda)^3$$

Roteiro

Exemplos

- Encontre “por inspeção” as formas canônicas de Jordan de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Exemplos

- Respostas

$$J_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \qquad J_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplos

- Encontre “em 3 passos” as formas canônicas de Jordan de

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplos

- Respostas

$$J_A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad J_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Exemplo

- Encontre uma matriz M tal que $M^{-1}AM$ esteja na forma canônica de Jordan:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Exemplo

- Autovalores de A:

$$\lambda_1 = 1 \qquad m_1 = 2 \qquad q_1 = 1$$

$$\lambda_2 = 2 \qquad m_2 = 1 \qquad q_2 = 1$$

- Autovetores de A:

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad u_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo

- Precisamos encontrar um autovetor generalizado associado a $\lambda_1 = 1$.
- Sendo $u_1 = u_1^{(1)}$ e resolvendo $(A - I)u_1^{(2)} = u_1^{(1)}$, temos:

$$u_1^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo

- Conclusão: tomando

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

temos

$$M^{-1}AM = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- Confiamos o suficiente na Matemática (ou somos muito preguiçosos) para fazermos as contas...

Exercício

- Encontre a forma canônica de Jordan de

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ & & & 2 & -1 & -1 \\ & & & 0 & 1 & 1 \\ & & & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

  os elementos faltantes são nulos.
- Dica:

$$\det \begin{bmatrix} B & C \\ \bar{0} & D \end{bmatrix} = \det(B)\det(D)$$

  para B e D quadradas.

Exercício

- Resposta

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 2 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 2 & & & \\ & & & 2 & 1 & \\ & & & 0 & 2 & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Roteiro

Potenciação

- Consideremos a matriz A escrita em sua forma canônica de Jordan:
$$A = MJM^{-1}$$
- Para elevar a matriz a uma certa potência, temos $A^n = MJ^nM^{-1}$. Mas obter J^n é fácil, pois:
$$J^n = \begin{bmatrix} J_1 & \bar{0} & \bar{0} & \dots & \bar{0} \\ \bar{0} & J_2 & \bar{0} & \dots & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & J_3 & \dots & \bar{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \dots & J_s \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} J_1^n & \bar{0} & \bar{0} & \dots & \bar{0} \\ \bar{0} & J_2^n & \bar{0} & \dots & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & J_3^n & \dots & \bar{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \dots & J_s^n \end{bmatrix}$$
- A questão agora é: como elevar um certo bloco de Jordan à n-ésima potência.

Potenciação

- Começamos com o exemplo mais simples possível:

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

- Para este caso, temos:

$$J^2 = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{bmatrix} \qquad J^3 = \begin{bmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & \lambda^3 \end{bmatrix} \qquad J^4 = \begin{bmatrix} \lambda^4 & 4\lambda^3 \\ 0 & \lambda^4 \end{bmatrix}$$

- Por indução se chega a:

$$J^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{bmatrix}$$

Potenciação

- Complicando um pouco mais:

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$J^2 = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & 1 \\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix} \quad J^3 = \begin{bmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda \\ 0 & \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & 0 & \lambda^3 \end{bmatrix} \quad J^4 = \begin{bmatrix} \lambda^4 & 4\lambda^3 & 6\lambda^2 \\ 0 & \lambda^4 & 4\lambda^3 \\ 0 & 0 & \lambda^4 \end{bmatrix}$$

- Por indução se chega a:

$$J^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \dfrac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{bmatrix}$$

Potenciação

- Repetindo o raciocínio para um bloco $p \times p$:

Potência de um bloco de Jordan $p \times p$

Sendo $f(x) = x^n$

$$J^n = \begin{bmatrix} f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \dots & \frac{f^{(p-2)}(\lambda)}{(p-2)!} & \frac{f^{(p-1)}(\lambda)}{(p-1)!} \\ 0 & f(\lambda) & \dots & \frac{f^{(p-3)}(\lambda)}{(p-3)!} & \frac{f^{(p-2)}(\lambda)}{(p-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f(\lambda) & f'(\lambda) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & f(\lambda) \end{bmatrix}$$

Funções mais gerais

- O que vimos antes sobre potenciação de uma matriz pode ser generalizado para funções mais gerais.
- Suponha que se conheça a forma canônica de Jordan de $A = MJM^{-1}$. Será que $f(A) = Mf(J)M^{-1}$?
- A resposta é **depende**.
- Se a função f for uma função polinomial $f(A) = a_0 I + a_1 A + \ldots + a_n A^n$, então podemos dizer que $f(A) = Mf(J)M^{-1}$.
- Este resultado ainda continua válido no caso em que $f(A)$ é escrita como uma série de potências convergente, como por exemplo: $\exp(A)$, $\sinh(A)$, $\log(A)$.
- Mas há exceções, como por exemplo $f(A) = A^T$...

Funções mais gerais

- No caso em que $f(A) = Mf(J)M^{-1}$, então

$$f(J) = \begin{bmatrix} f(J_1) & \bar{0} & \bar{0} & \dots & \bar{0} \\ \bar{0} & f(J_2) & \bar{0} & \dots & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & f(J_3) & \dots & \bar{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \dots & f(J_s) \end{bmatrix}$$

- Mas como calcular $f(.)$ de um certo bloco de Jordan?
- Exatamente como antes!

Funções mais gerais

Função de um bloco de Jordan $p \times p$

Sendo $f(x)$ uma função continuamente diferenciável

$$f(J) = \begin{bmatrix} f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \dots & \frac{f^{(p-2)}(\lambda)}{(p-2)!} & \frac{f^{(p-1)}(\lambda)}{(p-1)!} \\ 0 & f(\lambda) & \dots & \frac{f^{(p-3)}(\lambda)}{(p-3)!} & \frac{f^{(p-2)}(\lambda)}{(p-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f(\lambda) & f'(\lambda) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & f(\lambda) \end{bmatrix}$$