MAT-27 — Lista-02 — Agosto/2011

1 No conjunto $V = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ definamos "adição" assim:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, 0)$$

e multiplicação por escalares como no $\mathbb{R}^2$, ou seja, para cada $a \in \mathbb{R}$,

$$a(x, y) = (ax, ay).$$

Nessas condições V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$? Por quê?

2 No conjunto V do exercício anterior definamos a "adição" como o fazemos habitualmente no $\mathbb{R}^2$ e a multiplicação por escalares assim:

$$a(x, y) = (ax, 0).$$

É então V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$? Por quê?

3 Seja V o conjunto dos pares ordenados de números reais. V não é um espaço vetorial em relação a nenhum dos dois seguintes pares de operações sobre V:

a) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ e $a(x, y) = (x, ay)$, e

b) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1, y_1)$ e $a(x, y) = (ax, ay)$.

Diga em cada caso quais dos 8 axiomas não se verificam.

4 Seja V como no exercício anterior. Definamos:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (2x_1 - 2y_1, -x_1 + y_1),$$
$$a(x, y) = (3ay, -ax),$$

Com essas operações definidas sobre V, perguntamos se este conjunto é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

5 Mostrar que todo espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ também é espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

6 Seja $u = (1 + i, i)$, $v = (1 - i, 2i)$ e $w = (2, 3 + i)$ vetores no espaço vetorial $\mathbb{C}^2$.

a) Calcular $(3 + i)u - iv - (2 - i)w$;

b) Existe $z \in \mathbb{C}$ tal que $v = zu$?

7 No espaço vetorial $P_3(\mathbb{R})$ sejam dados os vetores $f(t) = t^3 - 1$, $g(t) = t^2 + t - 1$ e $h(t) = t + 2$.

a) Calcular $2f(t) + 3g(t) - 4h(t)$;

b) Existe $k \in \mathbb{R}$ de maneira que $f(t) + kg(t) = h(t)$?

c) Existem $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ tais que $f(t) = k_1 g(t) + k_2 h(t)$?

8 No $\mathbb{R}^2$ consideremos os vetores $u = (1, 1)$, $v = (3, -2)$ e $w = (3, -2)$.

a) Resolver a equação:

$$\frac{x + u}{2} + \frac{v + x}{3} = w,$$

na incógnita $x \in \mathbb{R}^2$;

b) Resolver o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} x + y + z = u \\ 2x - y + z = v \\ x + y - 2z = w \end{cases}$$

nas incógnitas x, y, $z \in \mathbb{R}^2$.

9 Quais dos seguintes conjuntos W abaixo são sub-espaços do $\mathbb{R}^3$?

(a) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$

(b) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in Z\}$

(c) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \text{ é irracional}\}$

(d) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 3z = 0\}$

(e) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0, \text{ com } a, b, c \in \mathbb{R}\}$

10 Quais dos conjuntos abaixo são sub-espaços do espaço $P(\mathbb{R})$ de todos os polinômios reais? (Leia o apêndice II).

(a) $W = \{f(t) \in P(R) \mid f(t) \text{ tem grau maior que } 2\}$

(b) $W = \{f(t) \mid f(0) = 2f(1)\}$

(c) $W = \{f(t) \mid f(t) > 0, \forall t \in \mathbb{R}\}$.

(d) $W = \{f(t) \mid f(t) + f'(t) = 0\}$

11 Seja I = [0, 1]. Verificar se são sub-espaços vetoriais de C(I) (veja exercício resolvido nº 4):

(a) $\{f \in C(I) \mid f(0) = 0\}$

(b) $\{f \in C(I) \mid \int_0^1 f(t)dt = 0\}$

(c) $\{f \in C(I) \mid f(0) = f(1)\}$

(d) $\{f \in C(I) \mid f(t) = 0$ em todos os pontos de I menos um número finito deles$\}$.

12 Mostrar que os polinômios $1 - t$, $(1 - t)^2$, $(1 - t)^3$ e 1 geram $P_3(\mathbb{R})$.

13 Dar um sistema de geradores para cada um dos seguintes sub-espaços do $\mathbb{R}^3$:

a) $U = \{(x, y, z) \mid x - 2y = 0\}$

b) $V = \{(x, y, z) \mid x + z = 0 \text{ e } x - 2y = 0\}$

c) $W = \{(x, y, z) \mid x + 2y - 3z = 0\}$

d) $U \cap V$

e) $V + W$.

14 Sejam U e V sub-espaços vetoriais do espaço W. Provar que:

a) $U \subset V \Longrightarrow U + V = V$;

b) $U \subset V \Longrightarrow U \cap V = U$;

c) $U + V = U \Longrightarrow U \supset V$;

d) $U \cap V = U \Longrightarrow U \subset V$.

15 Sejam u e v dois vetores não nulos do $\mathbb{R}^2$. Se não existe nenhum $t \in \mathbb{R}$ tal que $u = tv$, mostrar que $\mathbb{R}^2$ é soma direta dos sub-espaços [u] e [v].

16 Se U, V e W são sub-espaços vetoriais do mesmo espaço, mostrar que $(U \cap V) + (U \cap W) \subset U \cap (V + W)$. Descubra um exemplo para o qual o primeiro membro dessa relação é diferente do segundo e um exemplo onde ocorre igualdade.

17 Mostrar que os números complexos $2 + 3i$ e $1 - 2i$ geram o espaço vetorial $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$.

18 Mostrar que os dois conjuntos $\{(1, -1, 2), (3, 0, 1)\}$ e $\{(-1, -2, 3), (3, 3, -4)\}$ geram o mesmo sub-espaço vetorial do $\mathbb{R}^3$.

19 Considere os seguintes vetores do $\mathbb{R}^3$: $(-1, 0, 1)$ e $(3, 4, -2)$. Determinar um sistema de equações homogêneas para o qual o espaço solução seja exatamente o sub-espaço gerado por esses vetores.

20 Mostrar que os dois conjuntos abaixo formados de funções contínuas reais definidas em $\mathbb{R}$ geram o mesmo sub-espaço vetorial de $C(\mathbb{R})$:

$$\{\text{sen}^2 t, \cos^2 t, \text{sen } t \cdot \cos t\} \quad \text{e} \quad \{1, \text{sen } 2t, \cos 2t\}$$

Respostas

1. Não.

2. Não. Sugestão: calcule $1 \cdot (x, y)$.

3.

4. Não.

5.

6. $X = -3A - 2B + 6C = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$

7. Não.

8. 2) $x = (\frac{16}{9}, -1)$; $y = (\frac{-1}{9}, 1)$ e $z = (\frac{-2}{3}, 1)$

9. (a) Sim.
(b) Não.
(c) Não.
(d) Sim.
(e) Sim.

10. (a) Não.
(b) Sim.
(c) Não.
(d) Sim.

11. Todos são.

12.

13. 1) {(2, 1, 0); (0, 0, 1)}
2) {(2, 1, -2)}
3) {(3, 0, 1); (-2, 1, 0)}
4) {(2, 1, -2)}
5) {(2, 1, -2); (3, 0, 1); (-2, 1, 0)}

14.

15.

16. No $\mathbb{R}^2$ considere $U = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$, $V = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ e $W = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

17.

18.

19.

20.