MAT-27 — Lista-03 — Agosto/2011

1 Quais os subconjuntos abaixo do $\mathbb{R}^3$ são linearmente independentes:

a) $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (2, 3, 5)\}$

b) $\{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 0, -2)\}$

c) $\{(0, 0, 0), (1, 2, 3), (4, 1, -2)\}$

d) $\{(1, 1, 1), (1, 2, 1), (3, 2, -1)\}$

2 Quais dos subconjuntos abaixo de $P_4(\mathbb{R})$ são linearmente independentes:

a) $\{(1, x - 1, x^2 + 2x + 1, x^2\}$

b) $\{2x, x^2 + 1, x + 1, x^2 - 1\}$

c) $\{x(x - 1), x^3, 2x^3 - x^2, x\}$

d) $\{x^4 + x - 1, x^3 - x + 1, x^2 - 1\}$

3 Demonstrar que o conjunto $\{1, e^x, e^{2x}\}$ de vetores de $C([0, 1])$ é L.I.

4 Mostrar que o conjunto $\{1, e^x, xe^x\}$ de vetores de $C([0, 1])$ é L.I.

5 Demonstrar que é L.I. o conjunto

$$\{1, (x - a), (x - a)^2, \ldots, (x - a)^{n-1}\}$$

de vetores de $P_{n-1}(\mathbb{R})$, onde a é um número arbitrário.

6 Mostrar que o subconjunto $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ de vetores de um espaço vetorial V é L.D. se, e somente se, existe um inteiro k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ tal que x_k é combinação linear dos demais vetores do conjunto.

7 Determinar m e n para que os conjuntos de vetores do $\mathbb{R}^3$ dados abaixo sejam L.I.

a) $\{(3, 5m, 1), (2, 0, 4), (1, m, 3)\}$

b) $\{(1, 3, 5), (2, m + 1, 10)\}$

c) $\{(6, 2, n), (3, m + n, m - 1)\}$

8 Quais dos seguintes subconjuntos do $\mathbb{C}^3$ são L.I. sobre $\mathbb{C}$?

(a) $\{(i, 1, 0), (1 + i, 2, 0), (3, 1, 0)\}$

(b) $\{(i, 1, 0), (0, 1, i), (0, i, i)\}$

(c) $\{(i, 1, 0), (2 + i, 3i, 5 - i), (2, 4 + 4i, 4 - 6i)\}$

9 Sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ números reais distintos 2 a 2. Provar que o conjunto de funções $\{e^{\alpha_1 t}, \ldots, e^{\alpha_n t}\}$ é L.I.

10 Provar que o conjunto de funções $\{e^{at} \cos bt, e^{at} \operatorname{sen} bt\}$, onde a e b são números reais e $b \neq 0$, é L.I.

11 Dar uma base e a dimensão do sub-espaço W de $\mathbb{R}^4$ onde $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = y \text{ e } x - 3y + t = 0\}$.

12 Sendo W e U sub-espaços do $\mathbb{R}^4$ de dimensão 3, que dimensões pode ter $W + U$ se $(1, 2, 1, 0), (-1, 1, 0, 1), (1, 5, 2, 1)$ é um sistema de geradores de $W \cap U$?

13 No espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ consideremos os seguintes sub-espaços:

$U = \{(x, y, z) \mid x = 0\}$, $V = \{(x, y, z) \mid y - 2z = 0\}$ e
$W = [(1, 1, 0), (0, 0, 2)]$.

Determinar uma base e a dimensão de cada um dos seguintes sub-espaços: U, V, W, $U \cap V$, $V + W$ e $U + V + W$.

14 Determinar uma base e a dimensão do sub-espaço de $M_3(\mathbb{R})$ constituído das matrizes anti-simétricas.

15 Para que valores de $a \in \mathbb{R}$ o seguinte conjunto é uma base de $\mathbb{R}^3$:

$$B = \{(a, 1, 0), (1, a, 1), (0, 1, a)\}.$$

16 Considere o seguinte sub-espaço vetorial de $\mathbb{C}^3$:

$$W = [(1, 0, i), (1, 1 + i, 1 - i), (1, -1 - i, -1 + 3i)]$$

Determinar uma base desse sub-espaço.

17 Determinar a dimensão dos seguintes sub-espaços de $M_n(\mathbb{R})$:

a) Sub-espaço das matrizes simétricas;

b) Sub-espaço das matrizes anti-simétricas;

c) Sub-espaço das matrizes A tais que $A = 2A^t$.

d) Sub-espaço das matrizes $A = (a_{ij})$ tais que $\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = 0$.

18 Determinar as coordenadas do vetor $u = (4, -5, 3) \in \mathbb{R}^3$, em relação às seguintes bases:

a) canônica;

b) $\{(1, 1, 1), (1, 2, 0), (3, 1, 0)\}$;

c) $\{(1, 2, 1), (0, 3, 2), (1, 1, 4)\}$.

19 Determinar as coordenadas de $1 - 2i \in \mathbb{C}$ em relação à seguinte base de $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$: $\{1 - i, 1 + i\}$.

20 Determinar as coordenadas do polinômio t^3 em relação à seguinte base de $P_3(\mathbb{R})$: $\{1, 2 - t, t^2 + 1, 1 + t + t^3\}$.

21 A matriz de mudança da base $\{1 + t, 1 - t^2\}$ para uma base C ambas do mesmo sub-espaço de $P_2(\mathbb{R})$ é

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Determinar a base C.

22 Considere as bases $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ e $C = \{g_1, g_2, g_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ assim relacionadas:

$$\begin{aligned} g_1 &= e_1 - e_2 - e_3 \\ g_2 &= 2e_2 + 3e_3 \\ g_3 &= 3e_1 + e_3 \end{aligned}$$

a) Determinar as matrizes de mudança de B para C e de C para B.

b) Se um vetor u de $\mathbb{R}^3$ apresenta coordenadas 1, 2 e 3, em relação a B, quais as coordenadas de u relativamente a C?

23 Seja $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ uma base do espaço vetorial V e seja $C = \{u_1, u_1 - u_2, \ldots, u_1 - u_n\}$. Mostrar que C é também uma base de V. Achar as matrizes de mudança de base de B para C e de C para B.

Respostas

1. 1) Não.
   2) Sim.
   3) Não.
   4) Sim.

2. 1) Não.
   2) Não.
   3) Não.
   4) Sim.

3.

4.

5.

6.

7. 1) $m \neq 0$.
   2) $m \neq 5$.
   3) $n \neq 0 \text{ ou } m \neq 1$.

8. (a) Não.
   (b) Sim.
   (c) Não.

9.

10.

11. $\{(2,1,0,1);(0,0,1,0)\}$ e $\dim W = 2$.

12. 4

13.

	Base	Dimensão
U:	$\{(0,1,0);(1,0,1)\}$	2
V:	$\{(1,0,0);(0,2,1)\}$	2
W:	$\{(1,1,0);(0,0,2)\}$	2
$U \cup V$:	$\{(0,2,1)\}$	1

$V + W = \mathbb{R}^3$

$U + V + W = \mathbb{R}^3$

14. $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

15. $a \neq 0$, $a \neq 1$ e $a \neq -1$.

16. $\{(1,0,i);(1,1+i,1-i)\}$

17.

18. 1) 4, -5 e 3.
2) 3, -5 e 2.

19. $\frac{3}{2}$ e $-\frac{1}{2}$.

20. -3, 1, 0 e 1.

21.

22. (a) De B para C é $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

De C para B é $\begin{pmatrix} -2 & -9 & 6 \\ -1 & -4 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

(b) -2, 0 e 1.

23.