MAT-27 — Lista-05 — Agosto/2011

1. Resolva $Ax = b$ utilizando o método dos mínimos quadrados:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

2. Encontre o quarto polinômio de Legendre. Ele é uma expressão cúbica $\frac{5}{2}x^3 + ax^2 + bx + c$ ortogonal a 1, x, $\frac{1}{2}(3x^2 - 1)$ no intervalo $-1 \leq x \leq 1$.

3. Encontre as funções $f(x)$ mais próximas da função $g(x) = \sin(2x)$ no intervalo $[-\pi, \pi]$, considerando:

   (a) $f(x) = a\cos x + b\sin x$.

   (b) $f(x) = c + dx$.

4. Expresse a matriz A como o produto de duas matrizes QR, de modo que $Q^T Q = I$ e R seja uma matriz triangular superior.

   (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

   (b) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

5. Prove as seguintes desigualdades

   (a) se A é uma matriz real $n \times n$ formada pelas matrizes coluna $u_1, u_2, \ldots, u_n$, de modo que $A = [u_1 \quad u_2 \quad \ldots \quad u_n]$, então:
   $$|\det(A)| \leq ||u_1||||u_2|| \ldots ||u_n||,$$
   sendo $||u_j|| = \sqrt{u_j^T u_j}$.

   (b) se A é uma matriz real $n \times n$ cujos elementos são em módulo iguais a 1, então:
   $$|\det(A)| \leq n^{n/2}.$$

6. Em $\mathbb{R}^4$, sejam $W = [(3, 2, -3, -1); (2, 0, -2, -2); (1, -1, -1, -2)]$ e $v = (1, 2, 2, -1)$. Obter a projeção ortogonal de v em W e a projeção ortogonal de v em $W^\perp$, considerando o produto interno usual.

7. Considere as operações de adição e multiplicação por escalar usuais em cada espaço vetorial abaixo.

   (a) Se $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, verifique se $\langle \alpha, \beta \rangle = \alpha^* \beta$ (produto de números complexos) define um produto interno em $\mathbb{C}$ espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{C}$. Notação: z^* é o complexo conjugado de z.

   (b) Se $(a + ib)$, $(c + id) \in \mathbb{C}$, mostre que $\langle a + ib, c + id \rangle = ac + bd$ define um produto interno em $\mathbb{C}$ espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$.

   (c) Se $(z_1, z_2); (w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2$,verifique se $\langle (z_1, z_2), (w_1, w_2) \rangle = z_1^* w_1 + \; z_2^* w_2$ define um produto interno em $\mathbb{C}^2$ espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{C}$.

8. Seja $V = \mathcal{C}[0, 1]$ com o produto interno $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)\, g(t)\; dt$. Se $g(t) = \sqrt{t}$ e $h(t) = e^t$, determine as projeções ortogonais de g e h sobre $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

9. Seja $V = \mathcal{C}[-\pi, \pi]$ com o produto interno $\langle f,\, g \rangle = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\, g(t)\ dt$.

   (a) Mostre que, com relação a este produto interno, o conjunto $S = \{\sin(t), \sin(2t), \ldots, \sin(kt)\}$, $k \in \mathbb{N}$, é ortogonal.

   (b) Se $W = [S]$ e $f(t) = \cos(mt),\ m \in \mathbb{N}$, obtenha a projeção ortogonal de f sobre W.

10. Seja $V = \mathcal{C}[0, 2\pi]$ com o produto interno $\langle f,\, g \rangle = \int\limits_{0}^{2\pi} f(t)\, g(t)\ dt$.

   (a) Mostre que, com relação a este produto interno, o conjunto $S_\infty = \{u_0(x),\ u_1(x),\ u_2(x),\ ...\}$, onde $u_0(x) = 1,\ u_{2k-1}(x) = \sin(kx),\ u_{2k}(x) = \cos(kx),\ k \in \mathbb{N}$, é ortogonal.

   (b) Ortonormalize $S_{2n} = \{u_0(x),\ ...,\ u_{2n}(x)\}$.

   (c) Mostre que a melhor aproximação de $f \in \mathcal{C}[0, 2\pi]$ em $[S_{2n}]$ é dada por:

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n} (\, a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \,,$$

   onde $a_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x)\ \cos(kx)\, dx$ e $b_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x)\ \sin(kx)\, dx$.

11. Considere os vetores de $\mathbb{C}^3$ (espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$):

$$\psi = \mathrm{i}\phi_1 + 3\mathrm{i}\phi_2 - \phi_3 \qquad \chi = \phi_1 - \mathrm{i}\phi_2 + 5\mathrm{i}\phi_3,$$

   onde $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{C}^3$.

   (a) Calcule $\langle \psi | \chi \rangle$, $\langle \chi | \psi \rangle$, $\langle \psi | \psi \rangle$ e $\langle \chi | \chi \rangle$.

   (b) A partir do resultado anterior, deduza $\langle \psi + \chi | \psi + \chi \rangle$.

12. Obtenha uma base ortonormal de $\mathbb{C}^3$ (espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$) a partir da base $(\mathrm{i}, \mathrm{i}, 1 + \mathrm{i})$, $(1, \mathrm{i}, 0)$, $(1, -\mathrm{i}, 0)$.

13. Sejam U e V sub-epaços vetoriais de um espaço euclideano de dimensão finita. Provar que $(U \cap V)^\perp = U^\perp + V^\perp$.

14. Considere os seguintes vetores do $\mathbb{R}^3$: $u = (2, 2, 2)$ e $v = (3, 3, 1)$.

   (a) Determinar dois vetores v_1 e v_2, tais que $v = v_1 + v_2$; v é ortogonal a u e $v_2 = \lambda u$ ($\lambda \in \mathbb{R}$).

   (b) Se $w = (-5, 1, -1)$ decompor v em uma parcela $W = [u, w]$ e uma parcela de $W^\perp$.

   (c) Determinar uma base ortonormal de W.

15. Mostrar que a matriz de mudança de base de um espaço euclideano de dimensão finita é uma matriz ortogonal.

Respostas

1. $x = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$

2. $\frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$

3. $a = b = c = d = 0.$

4.

5.

6.

7.

8.

9.

10.

11.

12.

13.

14. (a) $v_1 = \frac{1}{3}(2, 2, -4)$ e $v_2 = \frac{1}{3}(7, 7, 7)$.
    (b) $v = \frac{1}{7}(18, 15, 16) + \frac{1}{7}(3, 6, -9)$.
    (c)

15.