MAT-27 — Lista-06 — Setembro/2011

1. Qual das seguintes aplicações de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$ são operadores lineares?
   (a) $F_1(x, y, z) = (x - y, x + y, 0)$;
   (b) $F_2(x, y, z) = (2x - y + z, 0, 0)$;
   (c) $F_3(x, y, z) = (x, x, x)$;
   (d) $F_4(x, y, z) = (2x^2 + 3y, x, z)$;
2. Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear assim definido na base canônica: $F(1, 0, 0) = (2, 3, 1)$, $F(0, 1, 0) = (5, 2, 7)$ e $F(0, 0, 1) = (-2, 0, 7)$.
   (a) Determinar $F(x, y, z)$, em que (x, y, z) é um vetor genérico do $\mathbb{R}^3$.
   (b) Mostrar que F é um operador linear.
3. Consideremos o espaço vetorial $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$ e seja $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $F(z) = \overline{z}$, $\forall z \in \mathbb{C}$. Mostre que F é um operador linear. Se tivéssemos considerado o espaço vetorial $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{C}$, seria F ainda um operador linear?
4. Verifique se são operadores lineares no espaço $P_n(\mathbb{R})$:
   (a) $F : P_n(\mathbb{R}) \to P_n(\mathbb{R})$ tal que $F(f(t)) = tf'(t)$, $\forall f(t) \in P_n(\mathbb{R})$.
   (b) $F : P_n(\mathbb{R}) \to P_n(\mathbb{R})$ tal que $F(f(t)) = f'(t) + t^2 f''(t)$, $\forall f(t) \in P_n(\mathbb{R})$.
5. Existe um operador linear $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $F(1, 1, 1) = (1, 2, 3)$, $F(1, 2, 3) = (1, 4, 9)$ e $F(2, 3, 4) = (1, 8, 27)$? Justifique a sua resposta.
6. Seja $u = (x, y, z, t)$ um vetor genérico do $\mathbb{R}^4$. Quais das aplicações definidas abaixo são operadores lineares do $\mathbb{R}^4$.
   (a) $F(u) = u + (1, 0, 1, 0)$;
   (b) $F(u) = (1, 0, 1, 1)$;
   (c) $F(u) = (x, y - z, y + z, x + t)$;
   (d) $F(u) = (\cos x, y, z, t)$;
7. Seja $F : U \to V$ uma transformação linear com a seguinte propriedade: se $\{u_1, ..., u_n\}$ é uma base de U, então $\{F(u_1), ..., F(u_n)\}$ é linearmente independente em V. Provar que F é injetora.
8. Para cada uma das transformações lineares abaixo determinar uma base e a dimensão do núcleo e da imagem.
   (a) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $F(x, y, z) = x + y - z$.
   (b) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $F(x, y) = (2x, x + y)$.
   (c) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definida por $F(x, y, z) = (x - y - z, x + y + z, 2x - y - z, -y)$.
   (d) $F : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ dada por $F(f(t)) = t^2 f''(t)$.
   (e) $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ dada por $F(X) = X + MX$, em que

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(f) $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definida por $F(X) = MX - XM$, em que

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

9. Determinar um operador linear $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja imagem é gerada por $(2, 1, 1)$ e $(1, -1, 2)$.

10. Considere o operador linear F do $\mathbb{R}^3$ definido por $F(1, 0, 0) = (1, 1, 1)$, $F(0, 1, 0) = (1, 0, 1)$ e $F(0, 1, 2) = (0, 0, 4)$. F é inversível? Se for, determine o isomorfismo inverso.

11. Sejam $u, v \in \mathbb{R}^2$ vetores tais que $\{u, v\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$. Sendo F transformação linear, mostrar que uma das seguintes alternativas se verifica:

    (a) $\{F(u), F(v)\}$ é L.I.;

    (b) $\dim \text{Im}(F) = 1$;

    (c) $\text{Im}(F) = o$.

12. Consideremos uma transformação linear $F : U \to V$. Se $\dim U > \dim V$, prove que existe um vetor não nulo $u_0 \in U$ tal que $F(u_0) = o$(vetor nulo de V). (Ou seja, F não é injetora).

13. Sendo $F, G, H \in L(\mathbb{R}^2)$ definidos por $F(x, y) = (x, 2y), G(x, y) = (y, x + y)$ e $H(x, y) = (0, x)$, determinar $F + G$, $F \circ G$, $G \circ (H + F)$, $G \circ F$, $H \circ F$, $F \circ H$, $H \circ F \circ G$ e $G \circ F \circ H$.

14. Sejam $F, G \in L(\mathbb{R}^3)$ assim definidos:

    $$F(x, y, z) = (x + y, z + y, z) \text{ e } G(x, y, z) = (x + 2y, y - z, x + 2z)$$

    Determinar:

    (a) $F \circ G$;

    (b) $\text{Ker}(F \circ G)$ e $\text{Im}(F \circ G)$;

    (c) Uma base e a dimensão de $\text{Ker}(F^2 \circ G)$.

15. Sejam $F \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ e $G \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ assim definidas:

    $$F(x, y) = (0, x, x - y) \text{ e } G(x, y, z) = (x - y, x + 2y + 3z)$$

    Determinar $F \circ G \circ F$.

16. Seja $F \in L(\mathbb{R}^2)$ dado por $F(x, y) = (y, x)$. Determinar $F^n(x, y)$, sendo $n \geq 1$ um número inteiro. Mesmo exercício com $G \in L(\mathbb{R}^2)$ dada por $G(x, y) = (x, 0)$.

17. Mostre que os operadores $F, G, H \in L(\mathbb{R}^2)$ dados por $F(x, y) = (x, 2y)$, $G(x, y) = (y, x + y)$ e $H(x, y) = (0, x)$ formam um conjunto L.I. em $L(\mathbb{R}^2)$.

18. Sejam F e G dois operadores lineares de um espaço vetorial V. Mostre que $\text{Ker}(G) \subset \text{Ker}(F \circ G)$. Dê um exemplo no qual vale a igualdade.

19. Mostrar que um operador $F \in L(V)$ é idempotente se, e somente se, $I - F$ é idempotente.

20. Seja $F \in L(\mathbb{R}^4)$ dado por $F(x, y, z, t) = (0, x, y + 2x, z + 2y + 3x)$. Mostrar que:

    (a) $F^4 = 0$;

    (b) $I - F$ é um automorfismo do $\mathbb{R}^4$ e $I + F + F^2 + F^3 = (I - F)^{-1}$

21. Seja $\mathbb{C}$ o espaço vetorial dos números complexos sobre $\mathbb{R}$. Consideremos $F, G \in L(\mathbb{C})$ assim definidas:

$$F(z) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) z \text{ e } G(z) = \mathrm{i}z, \;\; z \in \mathbb{C}$$

Calcular:

(a) F^2;

(b) F^4;

(c) G^2;

(d) F^2;

(e) $F \circ G$;

(f) $(F \circ G) \circ (F \circ G)$;

Respostas:

1. (a) Sim.
   (b) Sim.
   (c) Sim.
   (d) Não.

2. F(x, y, z) = (2x +5y -2z, 3x + 2y, x + 7y +7z).

3. Sobre $\mathbb{C}$ não é linear.

4. (a) Sim.
   (b) Sim.

5. Não, pois $f(2,3,4)$ deveria ser $(2,6,12)$.

6.

7.

8.

9.

10.

11.

12.

13. $(F+H)(x,y) = (x, x+2y)$;
    $(F \circ G)(x,y) = (y, 2x+2y)$
    $(G \circ (F+H))(x,y) = (x+2y, 2x+2y)$

14. $(F \circ G)(x,y,z) = (x+3y-z, x+y+z, x+2z)$
    $\text{Ker}(F \circ G) = \{y(-2,1,1) \mid y \in \mathbb{R}\}$
    $\text{Im}(G \circ F) = \{x(1,0,1) + y(3,1,1) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

15.

16. $(I+F+F^2)(x,y) = (22x+21y, 35x+36y)$ não é isomorfismo pois $\text{Ker}(I+F+F^2) = \{(x,-x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

17.

18.

19.

20. (a)
    (b) $(I-F)(x,y,z,t) = (x, y-x, z-y-2x, t-z-2y-3x)$ é isomorfismo pois $\text{Ker}(I-F) = (0,0,0,0)$.

21. (a) $F^2(z) = \text{i}z$;
    (b)
    (c) $G^2(z) = -z$;
    (d)
    (e)
    (f)