MAT-27 — Lista-07 — Setembro/2011

1. Seja $F \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ definida por $F(x,y,z) = (x+z, y-2z)$. Determinar $(F)_{B,C}$, sendo $B = \{(1,2,1),(0,1,1),(0,3,-1)\}$ e $C = \{(1,5),(2,-1)\}$.

2. Determinar as matrizes das seguintes transformações lineares em relação às bases canônicas dos respectivos espaços:

   (a) $F \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ definida por $F(x,y,z) = (x+y, z)$;

   (b) $F \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ definida por $F(x,y) = (x+y, x, x-y)$;

   (c) $F \in L(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$ definida por $F(x,y,z,t) = 2x+y-z+3t$;

   (d) $F \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ definida por $F(x) = (x, 2x, 3x)$;

3. No espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ seja

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

   Detrminar a matriz do operador linear $F \in L(M_2(\mathbb{R}))$ dado por $F(X) = MX - XM$, em relação à base canônica

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   de $M_2(\mathbb{R})$.

4. Seja F o operador linear de $M_2(\mathbb{R})$ dado por

$$F(X) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} X$$

   $\forall X$ em $M_2(\mathbb{R})$. Sendo B base canônica do espaço $M_2(\mathbb{R})$, determine o traço da maitrz $(F)_B$.(Nota: traço = soma dos termos da diagnal principal).

5. Seja F o operador linear do $\mathbb{R}^2$ cuja matriz em relação à base $B = \{(1,0),(1,4)\}$ é

$$(F)_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

   Determinar a matriz de F em relação à base canônica, usando a fórmula de mudança de base para um operador.

6. Seja $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ uma base de um espaço vetorial V sobre $\mathbb{R}$. Sendo $F, g \in L(V)$ dados por $F(e_1) = e_1 - e_2$, $F(e_2) = e_1 + e_3$, $F(e_3) = e_2$, $G(e_1) = 2e_1 + e_3$, $G(e_2) = e_1$ e $G(e_3) = e_2 - 3e_1$, determinar em relação à base B as matrizes dos seguintes operadores lineares: $F, G, F+G, 2F-G, F \circ G, G \circ F, F^2 + G^2, F^{-1}$(caso exista) e G^{-1}(caso exista).

7. Sejam $F, G \in L(P_2(\mathbb{R}), P_3(\mathbb{R}))$ assim definidos: $F(p(t)) = tp(t) - p(1)$ e $G(p(t)) = (t-1)p(t), \forall p(t) \in P_2(\mathbb{R})$. Determinar as matrizes de F e G em relação ao seguinte par de bases: $B = \{1, t^2, (t-1)^2\}$ e $C = \{1, t-1, (t-1)^2, (t-1)^3\}$ de $P_2(\mathbb{R})$ e $P_3(\mathbb{R})$, respectivamente.

8. Seja $F \in L(P_2(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ definida por $\int_{-1}^{1} p(t)dt$. Determinar a matriz de F em relação às bases:

   (a) $B = \{1, t, t^2\}$ e $C = \{1\}$;

   (b) $B = \{1, 1+t, -1+t^2\}$ e $C = \{-2\}$;

9. Determinar todos os operadores lineares F do $\mathbb{R}^2$ tais que $F^2 = F$ e $F(x,y) = (ax, bx+cy)$.

10. Seja T um operador linear de um espaço vetorial V de dimensão 2. Se a matriz de$T$ em relação a uma certa base B de V é

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Mostar que $T^2 - (a+d)T + (ad - bc)I = 0$(operador nulo).

11. Sejam F_1 e $F_2 \in (\mathbb{R}^3)*$ definidas por $F_1(x,y,z) = x - 3y + 2z$ e $F_2(x,y,z) = 2x - y + z$. Determinar $F_1 + F_2$, $2F_1 + 3F_2$ e os respectivos núcleos.

12. Determine as bases duais de cada uma das seguintes bases:
    (a) $\{(1,1,2),(1,2,0),(3,4,0)\}$ do $\mathbb{R}^3$;
    (b) $\{(1,2),(0,1)\}$ do $\mathbb{R}^2$;
    (c) $\{(0,1,0,0),(2,1,0,0),(0,0,1,1),(0,0,0,3)\}$ do $\mathbb{R}^4$;
    (d) $\{1, t, 1-t^2\}$ do espaço $P_2(\mathbb{R})$;

13. Seja $V = \mathbb{R}^2$. Considere os subespaços $W*$ de $V*$ gerado pelos funcionais F e G dados por $F(x,y,z) = x - y$ e $G(x,y,z) = y - 2z$. Determinar uma base do seguinte subespaço de V: $W = \{u \in V \mid F(u) = 0, \forall F \in W*\}$.

14. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Sejam u e v dois vetores desse espaço com a seguinte propriedade: $\forall F \in V* : F(u) \Longrightarrow F(v) = 0$. Mostrar $\{u,v\}$ é L.D.

    Sugetão: Se fossem L.I. existiria uma base B de V contendo u e v. Considere a base dual.

15. Verificar se são bases de $\mathbb{R}^3$ os seguintes conjuntos:
    (a) $\{F,G,H\}$ onde $F(x,y,z) = 2x, G(x,y,z) = y + z$ e $H(x,y,z) = x - 2z$.
    (b) $\{F,G,H\}$ onde $F(x,y,z) = 2x + y - z, G(x,y,z) = x$ e $H(x,y,z) = x - y + 4z$.

16. Verificar se são semelhante as matrizes:

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

17. Provar que se A e B são semelhantes então A^n e B^n são semelhantes, para todo $n \geq 1$. Sendo $p(t)$ um polinômio, $p(t) = a_0 + a_1 t + ... + a_n t^n$, indicamos por $p(A)$ a matriz $p(A) = a_0 I + a_1 A + ... + a_n A^n$. Provar que se A e B são semelhantes, então $p(A)$ e $p(B)$ são semelhantes.

18. Para que valores de a, b e c (reais) as seguintes matrizes de $M_2(\mathbb{R})$ são semelhantes?

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & -c \end{bmatrix}$$

19. Sejam A, B, C e D matrizes de ordem n, sendo A, B semelhantes, C, D semelhantes. É verdade que $A + C$ e $B + D$ são semelhantes? E quanto a AC e BD?

20. Para cada par de inteiros positivos (i,m) com $1 \leq i \leq m$ define-se a transformação linear $P_{i,m} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ como:

$$P_{i,m}(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_m) = (a_1, \ldots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \ldots, a_m).$$

    Prove que para todo $n \geq 2$ e para qualquer conjunto de $n-1$ vetores linearmente independentes $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ em $\mathbb{R}^n$, existe um inteiro k, $1 \leq k \leq n$, de forma que os vetores

$$P_{k,n}(v_1), P_{k,n}(v_2), \ldots, P_{k,n}(v_{n-1})$$

    são linearmente independentes.

21. Considere uma transformação linear $g : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ de modo que $g(AB) = g(BA)$ para quaisquer matrizes A e B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

    (a) Mostre que existe um $K \in \mathbb{R}$ tal que $g(A) = K\operatorname{tr}(A)$.

    (b) Se o determinante é uma operação que satisfaz a condição $\det(AB) = \det(BA)$ para quaisquer matrizes A e B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, por que então não é válida a conclusão do item (a)?

Respostas:

1. $(F) = \begin{bmatrix} \frac{2}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{9}{11} \\ \frac{10}{11} & \frac{6}{11} & -\frac{10}{11} \end{bmatrix}$

2. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

   (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$;;

   (c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$;

   (d) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

3.

4. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 20 & -4 \end{bmatrix}$

6.

7.

8. (a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$;

   (b) $\begin{bmatrix} -1 & -1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$;

9. $F(x,y) = (x,y), F(x,y) = (x,bx), F(x,y) = (0,bx+y)$ e $F(x,y) = (0,0)$.

10.

11. $(F_1 + F_2)(x,y,z) = 3x - 4y + 3z$, $(2F_1 + 3F_2)(x,y,z) = 8x - 9y + 7z$ e os respectivos núcleos.

12. (a) $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$ em que $\phi_1(x,y,z) = \frac{1}{2}z, \phi_2(x,y,z) = -2x + \frac{3}{2}y + \frac{1}{4}z$ e $\phi_3(x,y,z) = x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}z$;

    (b)

    (c)

    (d) $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$ em que $\phi_1(a + bt + ct^2) = a + c, \phi_2(a + bt + ct^2) = b$ e $\phi_3(a + bt + ct^2) = -c$;

13. $\{(2,2,1)\}$.

14.

15. (a) Sim.

    (b) Sim.

16. Sim.

17.

18. $a = b = c = 0$.

19.

20.

21.