MAT-27 — Lista-08 — Outubro/2011

1. O objetivo desta questão é mostrar o princípio da incerteza. Para tanto, seja U um espaço vetorial complexo munido de produto interno e sejam A e B dois operadores lineares em U e hermitianos. Fixado um certo vetor $\psi \in U$ de norma unitária, i.e. $||\psi|| = 1$, definimos o valor médio $\langle A \rangle$ do operador A como:
$$\langle A \rangle = \langle \psi, A(\psi) \rangle.$$
O valor médio $\langle B \rangle$ também é definido do mesmo modo. Definimos a incerteza ΔA no operador A como: $\Delta A = \sqrt{\langle A^2 - \langle A \rangle^2 I \rangle}$, o mesmo valendo para a incerteza ΔB no operador B (I é o operador Identidade). Feitas estas definições, demonstre o princípio da incerteza:
$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle|,$$
onde $[A, B]$ é o comutador dos operadores: $[A, B] = AB - BA$.

2. Para cada transformação linear a seguir, obtenha a transformação linear adjunta:
   (a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (x + y, z)$.
   (b) $T : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$, $T(at^3 + bt^2 + ct + d) = (a, b)$.
   (c) $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, $T(A) = AX - XA$, onde $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.
   (d) $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $T(x, y, z) = (x + iy, -ix + 7y, 15z)$. Considere $\mathbb{C}$ espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$. O que mudaria se você considerasse $\mathbb{C}$ espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$?

3. Seja W um subespaço de um espaço euclidiano de dimensão finita V. Para todo $v \in V$, seja $v = w + w'$ com $w \in W$ e $w' \in W^\perp$. Mostar que a aplicação $T : V \to V$ dada por: $T(v) = w - w'$ é linear e tem a seguinte propriedade $\langle u, T(v) \rangle = \langle T(u), v \rangle, \forall u, v \in V$.

4. Seja V um espaço euclidiano. Se $u \in V$, $W = [u]$ e E é a transformação linear que associa a cada vetor de V sua projeção ortogonal sobre W, mostre que:
$$||v - E(v)|| \leq ||v - w||, \forall v \in V, \forall w \in W$$
Interprete esse resultado geometricamente.

5. Seja V um espaço euclidiano de dimensão finita e seja E a projeção ortogonal de V sobre o subespaço W de V. Mostrar que o operador linear E tem a seguinte propriedade: $\langle E(u), v \rangle = \langle u, E(v) \rangle, \forall u, v \in V$.

6. Determine $m \in \mathbb{R}$ a fim de que o seguinte operador linear do $\mathbb{R}^3$ seja um isomentia:
$$F(x, y, z) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}y + mz, -\frac{1}{\sqrt{6}}x + \frac{2}{\sqrt{6}}y - \frac{1}{\sqrt{6}}z, -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{6}}z \right)$$

7. No espaço vetorial $V = M_n(\mathbb{R})$ consideremos o produto interno definido por $\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(AB^T)$. Dada uma matriz $M \in V$, seja $T_M : V \to V$ o operador linear definido por $T_M(X) = MX, \forall X \in V$. Mostre que T_M é uma isometria se, e seomente se, M for uma matriz ortogonal.

8. Seja H um subespaço do espaço euclideano V. Então cada v se expressa de uma maneira única, como $v = h + t$, onde $h \in H$ e $t \in H^\perp$. Considere a aplicação $A : V \to V$ definida por $A(v) = h - t, \forall v \in V$.

(a) Mostre que A é linear e auto-adjunto.

(b) Se $V = \mathbb{R}^3$ com o produto interno usual, e $H = [(1,1,0)]$, achar a matriz de A relativa à base usual do $\mathbb{R}^3$.

9. Seja V um espaço euclidiano de dimensão finita. Mostar que duas quaisquer das propriedades a segiur de um operador $A \in L(V)$ implica a restante:

   (a) A é auto-adjunto.

   (b) A é uma isometria.

   (c) $A^2 = I$.

10. Seja $T \in L(V)$ um automorfismo. Se T é auto-adjunto, mostrar que T^{-1} também o é.

11. Seja A um operador auto-adjunto de um espaço euclidiano V. Se H é um subespaço vetorial de V com a proprieadade $u \in H \Rightarrow A(u) \in H$, mostre que $H^{\perp}$ tem tabém essa proriedade.

12. Seja um operador auto-adjunto de um espaço euclidiano V. Se $\langle T(u), u\rangle = 0$, para todo $u \in V$, mostrar que $T = 0$.

13. Sejam $T, S \in L(V)$ operadores lineares auto-adjuntos. Mostrar que $T \circ S$ é auto-adjunto se, e somente se, $T \circ S = S \circ T$.

14. Achar os valores e vetores próprios do operador T do $\mathbb{R}^2$ dado por:

   (a) $T(x, y) = (x + y, x - y)$;

   (b) $T(x, y) = (-x, -y)$;

   (c) $T(1, 0) = (0, -1)$ e $T(0, 1) = (1, 0)$.

15. Achar os valores e os vetores próprios do operador linear T do $\mathbb{R}^3$ dado por:

   (a) $T(1, 0, 0) = (2, 00)$, $T(0, 1, 0) = (2, 1, 2)$ e $T(0, 0, 1) = (3, 2, 1)$;

   (b) $T(1, 0, 0) = (0, 0, 0)$, $T(0, 10) = (0, 0, 0)$ e $T(0, 0, 1) = (5, -1, 2)$.

16. Determine os valores e vetores próprios do operador T do $\mathbb{R}^4$ cuja mariz em relação à base canônica é:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

17. Determinar o polinômio característico e os valores próprios do operadore linear $T : V \to V$ que é definido em uma base $\{e_1, \ldots e_n\}$ por $T(e_i) = \lambda_1 e_1 (\lambda_i \in \mathbb{R})$.

18. Calcular os polinômios característicos e os valores próprios das seguintes matriz:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

19. Seja $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ a matriz de um operador do $\mathbb{R}^2$. Ache os valores próprios desse operador. Existem, neste caso, dois vetores próprios linearmente independentes?

20. Provar que se λ é valor próprio de T, então λ^n é valor próprio de T^n. Generalizando, se $p(t)$ é um polinômio, então $p(\lambda)$ é valor próprio de $p(T)$, em que $p(T) = a_0 I + a_1 T + \dots + a_n T^n$, se $p(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$.

21. Mostre que duas matrizes semelhantes possuem o mesmo posto.

22. Um operador linear A no espaço vetorial V é chamado de involução se $A^2 = I$, onde I é o operador identidade em V. Seja $\dim V = n < \infty$.

    (a) Mostre que se A é uma involução, então é possível encontrar uma base de V formada por autovetores de A.

    (b) Seja C um conjunto formado por involuções de V que comutam entre si (duas a duas). Encontre (em termos de n) o maior número de elementos de C.

Respostas:

1.
2.
3.
4.
5.
6. $m = \frac{1}{\sqrt{3}}$.
7.
8.
9.
10.
11.
12.
13.
14. (a) $\sqrt{2}$ e $(1, \sqrt{2} - 1)$; $-\sqrt{2}$ e $(-1, \sqrt{2} + 1)$.
    (b) -1 e qualquer vetor não nulo.
    (c) Não há valores próprios reais.
15. (a) 2 e $(1, 0, 0)$, 3 e $(5, 1, 1)$; -1 e $(1, 3, -3)$.
    (b) 0 duplo e $(1, 00)$ e $(0, 1, 0)$; 2 e $(0, 0, 1)$.
16. 3 triplo e $(1, 0, 0, 0)$ e $(0, 0, 0, 1)$; 4 e $(0, 0, 1, 0)$.
17. $p_T(t) = (\lambda_1 - t)(\lambda_2 - t) \dots\ (\lambda_n - t)$. Os valores prórpios de T são $\lambda_1, \lambda_2, \dots\ \lambda_n$.
18. (a) $t^2 - 3t + 1$; $\frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5})$.
    (b) $t^2 - 4$; ± 2.
    (c) $t^2 - 3t + 2$; 1 e 2.
    (d) $t^2 - 4$; ± 2.
19. 1 duplo; não há.
20.
21.
22.