MAT-27 — Lista-09 — Outubro/2011

1. Determinar, se possível, uma matriz $M \in M_2(\mathbb{R})$ de maneira que $M^{-1}AM$ seja diagonal nos seguintes casos:

   (a) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 13 \end{bmatrix}$

   (b) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

2. Achar uma matriz diagonal semelhante à seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -6 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Estudar quanto à possibilidade de diagonalização as matrizes:

   (a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

   (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & 2 & 0 \\ n & 0 & 2 \end{bmatrix}$

   (c) $\begin{bmatrix} -1 & -4 & -2 & -2 \\ -4 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

   (d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

4. Seja $A \in L(\mathbb{R}^3)$ o operador linear cuja mariz relativa à base canônica é:

$$(a_{ij}) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

   (a) Achar os valores próprios de A.

   (b) Achar uma matriz ortonormal do $\mathbb{R}^3$ em relação à qual a matriz de A é diagonal.

   (c) Achar uma matriz M ortogonal tal que $M^T(a_{ij})M$ é a matriz diagonal obtida no item anterior.

5. Seja $A \in L(\mathbb{R}^3)$ definida por

$$A(x, y, z) = (x + y + z, x + y + z, x + y + z)$$

   (a) Achar os valores próprios de A.

   (b) Achar uma base ortonormal B do $\mathbb{R}^3$ tal que $(A)_B$ é diagonal.

(c) Qual a matriz de mudança da base canônica do $\mathbb{R}^3$ para B?

6. Calcular A^p nos seguintes casos:

   (a) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 13 \end{bmatrix}$

   (b) $\begin{bmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

   (c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

   (d) $\begin{bmatrix} -1 & -4 & -2 & -2 \\ -4 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

7. Calcule e^A usando as matrizes do exercício anterior.

8. Ache todas as possíveis formas canônicas de Jordan de um operador linear T cujo polinômio característico é $p_T(t) = (t+1)^2(t-2)^3$.

9. Ache a forma canônica de Jordan das seguintes matrizes:

   (a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

   (b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

   (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & -3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & -3 & 4 & 1 \\ -8 & -2 & -7 & 5 & 4 \end{bmatrix}$

10. Seja A uma forma canônica de Jordan com r blocos de Jordan. Mostre que A admite exatamente r vetores próprios linearmente independentes.

11. Ache a forma canônica de Jordan para o operador diferencial derivada $D : P_3(\mathbb{C}) \to P_3(\mathbb{C})$.

12. Identifique as seguintes curvas de segundo grau:

    (a) $2xy + 3x - y + 1 = 0$
    (b) $4x^2 - 24xy + 11y^2 + 56x - 58y + 95 = 0$
    (c) $6x^2 - 4xy + 9y^2 - 4x - 32y - 6 = 0$
    (d) $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 19x - 17y + 11 = 0$
    (e) $4x^2 - 20xy + 25y^2 + 4x - 10y + 1 = 0$
    (f) $x^2 + y^2 + xy - x + 1 = 0$

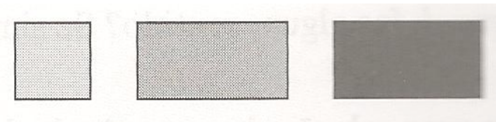
13. Discutir, em termos de valores de λ, as cônicas de equação:

    (a) $\lambda x^2 - 2xy + \lambda y^2 - 2x + 2y + 3 = 0$
    (b) $x^2 - 2xy + \lambda y^2 + 2x = 4$

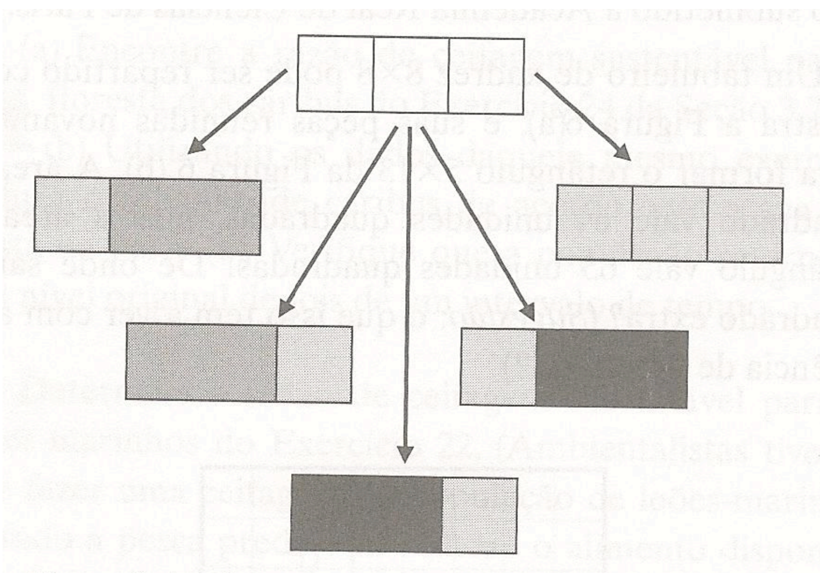
14. Resolva as relações de recorrência com as respectivas condições iniciais:

    (a) $x_0 = 0, x_1 = 5, x_n = 3x_{n-1} + 4x_{n-2}$ para $n \geq 2$;
    (b) $x_0 = 0, x_1 = 1, x_n = 4x_{n-1} - 3x_{n-2}$ para $n \geq 2$;
    (c) $y_1 = 1, y_2 = 6, y_n = 4y_{n-1} - 4x_{n-2}$ para $n \geq 3$;
    (d) $a_0 = 4, a_1 = 1, a_n = a_{n-1} - \frac{a_{n-2}}{4}$ para $n \geq 2$;
    (e) $b_0 = 0, b_1 = 1, b_n = 2b_{n-1} + 2b_{n-2}$ para $n \geq 2$;

15. Você tem um suprimento de três tipos de ladrilhos: dois tipos de ladrilhos 1×2 e outro tipo de ladrilho 1×1, como mostra a figura abaixo:

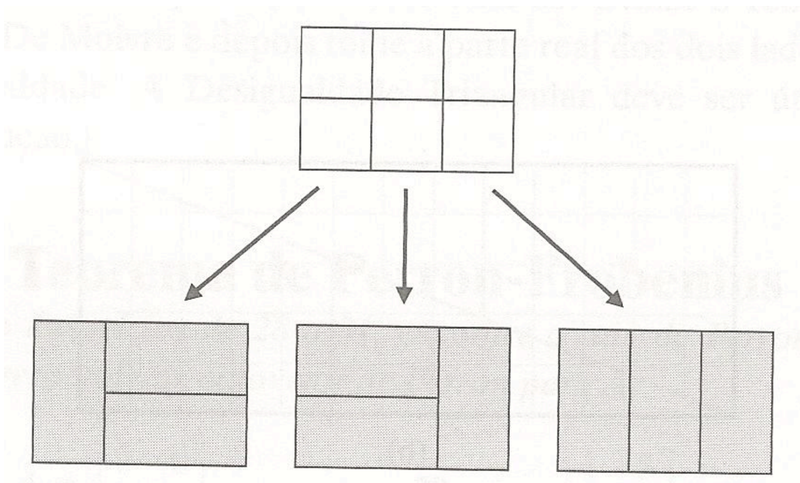


Seja t_n o número de maneiras diferentes de se recobrir um retângulo $1 \times n$ com esses ladrilhos. Por exemplo, a figura abaixo mostra que $t_3 = 5$:



    (a) Determine $t_1, \ldots t_5$. Será que t_0 faz algum sentido? Se sim, qual?
    (b) Determinar uma relação de recorrência de segunda ordem para t_n.
    (c) Usando t_1 e t_2 como condições iniciais, resolva a relação de recorrência da parte (b). Confira a sua resposta com os dados da parte (a).

16. Você tem um suprimento de dominós 1×2 com os quais você irá recobrir um retângulo $2 \times n$. Seja d_n o número de diferentes maneiras de se recobrir o retângulo. Por exemplo, a figura abaixo mostra que $d_3 = 3$.



(a) Determine $d_1, \ldots d_5$. Será que d_0 faz algum sentido? Se sim, qual?

(b) Determinar uma relação de recorrência de segunda ordem para d_n.

(c) Usando d_1 e d_2 como condições iniciais, resolva a relação de recorrência da parte (b). Confira a sua resposta com os dados da parte (a).

17. Seja X uma matriz não singular com colunas $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Seja Y uma matriz com colunas $X_2, X_3 \ldots, X_n, \mathbb{O}$. Mostre que as matrizes $A = X^{-1}Y$ e $B = YX^{-1}$ têm posto $n-1$ e 0 como o único autovalor.

18. Sejam A e B matrizes reais $n \times n$. Assuma que existam $n+1$ reais diferentes $t_0, t_1, \ldots, t_n$ tal que as matrizes
$$C_i = A + t_i B \qquad i = 0, 1, \ldots, n$$
são nilpotentes ($C_i^n = 0$). Mostre que tanto A como B são nilpotentes.

19. Sejam $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ tais que:
$$A^2B + BA^2 = 2ABA.$$
Mostre que existe um inteiro positivo k tal que $(AB - BA)^k = 0$.

20. Dada uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ simétrica e uma matriz $C \in M_n(\mathbb{R})$ não singular, mostre que $C^T AC$ possui o mesmo número de autovalores positivos, nulos e negativos que A.

21. Para quais valores de s e t as matrizes seguintes possuem todos os autovalores positivos?
$$A = \begin{bmatrix} s & -4 & -4 \\ -4 & s & -4 \\ -4 & -4 & s \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} t & 3 & 0 \\ 3 & t & 4 \\ 0 & 4 & t \end{bmatrix}$$

22. Dê uma razão imediata para o motivo de cada uma dessas afirmações serem verdadeiras:

(a) Toda matriz positiva definida é invertível.

(b) A única matriz de projeção positiva definida é I. OBS.: Uma matriz P é chamada de projeção quando for simétrica e $P^2 = P$.

(c) Uma matriz diagonal com elementos diagonais positivos é positiva definida.

(d) Uma matriz simétrica com um determinante positivo pode não ser positiva definida.

23. Há alguma solução $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ para $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz + 2xz = -15$?

Respostas:

1. (a) $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

   (b) Não existe.

2.

3. (a) É diagonalizável pois o valor próprio -1(duplo) tem multiplicidade gométrica 2.

   (b) É diagonalizável para todos os valores de m e n.

   (c) É diagonalizável pois há 2 valores próprios duplos 3 e -3 com multiplicidade gométrica 2.

   (d) É diagonalizável pois o valor próprio 2(triplo) tem multiplicidade gométrica 3.

4.

5.

6. (a) $A^p = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 12 + 14^p & 4 \cdot 14^p - 4 \\ 3 \cdot 14^p - 3 & 12 \cdot 14^p + 1 \end{bmatrix}$

   (b)

   (c)

   (d)

7. (a) $e^A = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} e^{14} + 12e & 4e^{14} - 4e \\ 3e^{14} - 3e & 12e^{14} + e \end{bmatrix}$

   (b)

   (c)

   (d)

8.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

9. (a)

   (b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

   (c)

10.

11. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

12. (a) Hipérbole

    (b) Hipérbole

    (c) Duas retas

    (d)

    (e)

    (f)

13. (a)

    (b) $\lambda = 1:$ parábola
    $\lambda < -1:$ hipérbole
    $\lambda > 1: \begin{cases} \lambda = \frac{3}{2}\text{: um ponto} \\ \lambda > \frac{3}{2}\text{: vazio} \\ \lambda < \frac{3}{2}\text{: elipse} \end{cases}$

14. (a)

    (b)

    (c)

    (d)

    (e)

15. (a)

    (b)

    (c)

16. (a)

    (b)

    (c)

17.

18.

19.

20.

21.

22.

23.