MAT-27 — Lista-10 — Outubro/2011

1. Determine a ordem da equação e diga se ela é ou não linear:

   (a) $t^2\frac{d^2y}{dt^2}+t\frac{dy}{dt}+2y=\sin t$

   (b) $(1+y^2)\frac{d^2y}{dt^2}+t\frac{dy}{dt}+y=e^t$

   (c) $\frac{d^4y}{dt^4}+\frac{d^3y}{dt^3}+\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}+y=1$

   (d) $\frac{dy}{dt}+ty^2=0$

   (e) $\frac{d^2y}{dt^2}+\sin(t+y)=\sin t$

   (f) $\frac{d^3y}{dt^3}+t\frac{dy}{dt}+(\cos^2 t)y=t^3$

2. Verifique que a função (ou funções) dada(s) é (ou são) solução (soluções) da equação diferencial:

   (a) $y''-y=0$, $y_1(t)=e^t$ e $y_2(t)=\cosh t$.

   (b) $y''+2y'-3y=0$, $y_1(t)=e^{-3t}$ e $y_2(t)=e^t$.

   (c) $y''-2ty=1$, $y_1(t)=e^{t^2}\int_0^t e^{-s^2}ds+e^{t^2}$.

3. Determine a ordem da EDP e diga se ela é linear ou não linear:

   (a) $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0$.

   (b) $u_{xx}+u_{yy}+uu_x+uu_y+u=0$.

   (c) $u_{xxx}+2u_{xxyy}+u_{yyyy}=0$.

   (d) $u_t+uu_t=1+u_{xx}$.

4. Encontre a solução geral da equação diferencial dada e use-a para determinar o comportamento da solução quando $t\to\infty$.

   (a) $y'+3y=t+e^{-2t}$.

   (b) $y'-2y=t^2e^{2t}$.

   (c) $ty'+2y=\sin t$, $t>0$.

5. Encontre a solução do PVI dado:

   (a) $y'-y=2te^{2t}$, $y(0)=1$.

   (b) $y'+2y=te^{-2t}$, $y(1)=0$.

   (c) $ty'+2y=t^2-t+1$, $y(1)=\frac{1}{2}$, $t>0$.

6. Considere o problema de valor inicial:

   $$y'+\frac{2}{3}y=1-\frac{1}{2}t,\quad y(0)=y_0.$$

   Encontre o valor de y_0 para o qual a solução encosta no eixo.

7. Mostre que se a e λ são constantes positivas e se b é qualquer número real, então toda solução da equação

   $$y'+ay=be^{-\lambda t}$$

   Tem a propriedade que $y\to 0$ quando $t\to\infty$.
   Sugestão: Considere os casos $a=\lambda$ e $a\neq\lambda$ separadamente.

8. Um tanque contém, inicialmente, 120 litros de água pura. Uma mistura contendo uma concentração de $\gamma\ g\backslash l$ de sal entra no tanque a uma taxa de 2 $l\backslash min$ e a solução bem misutrada sai do tanque à mesma taxa. Encontre uma fórmula em função de γ para a quantidade limite de sal no tanque quando $t \to \infty$.

9. A população de mosquitos em uma determinada área cresce a uma razão proporcional à população atual e, na ausência de outros fatores, a população dobra a cada semana. Existem, inicialmente, 200.000 mosquitos na área e os predadores comem 20.000 mosquitos por dia. Determine a população de mosquitos na área em qualquer instante t.

10. (a) Verifique que $y_1(t) = t^2$ e $y_2(t) = t^{-1}$ são duas soluções da equação diferencial $t^2y'' - 2y = 0$ para $t > 0$. Depois mostre que $c_1t^2 + c_2t^{-1}$ também é solução dessa equação para quaisquer que sejam c_1 e c_2.

    (b) Verifique $y_1(t) = t^2$ e $y_2(t) = t^{-1}$ são soluções da equação diferencial $yy'' + (y')^2 = 0$ para $t > 0$. Depois mostre que $c_1t^2 + c_2t^{-1}$ não é, em geral, uma solução dessa equação. Explique o porquê.

    (c) Mostre que se $y = \phi(t)$ é uma solução da equação diferencial $y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$, em que $g(t)$ não é identicamente nula, então $y = c\phi(t)$, em que c é qualquer constante diferente de 1, não é solução.

11. A função $y = \sin t^2$ pode ser solução de uma equação da forma $y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$, com coeficientes constantes, em um intervalo contendo $t = 0$? Explique a sua resposta.

12. Se o wronskiano de f e g é $3e^{4t}$ e se $f(t) = e^{2t}$, encontre $g(t)$.

13. O wronskiano de duas funções é $W(t) = t\sin^2 t$. As funções são linearmente dependentes ou independentes? Por quê?

14. (a) Se y_1 e y_2 são duas soluções linearmente independentes de $ty''+2y+te^ty = 0$ e se $W(y_1, y_2)(1) = 2$, encontre o valor de $W(y_1, y_2)(5)$.

    (b) Se o wronskiano de duas soluções quaisquer de $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ é constante, o que isso implica sobre os coeficientes p e q?

15. Use o método de redução de ordem para encontrar uma segunda solução das EDOs:

    (a) $t^2y'' - 4ty' + 6y = 0$, $t > 0$; $y_1(t) = t^2$.

    (b) $t^2y'' + 2ty' - 2y = 0$, $t > 0$; $y_1(t) = t$.

16. Encontre a solução geral da EDO dada:

    (a) $y'' - 2y + y = 0$.

    (b) $4y'' - 4y' - 3y = 0$.

    (c) $y'' - 2y' + 10y = 0$.

    (d) $4y'' + 17y' + 4y = 0$.

    (e) $25y'' - 2oy + 4y = 0$.

    (f) $y^{viii} + 8y^{iv} + 16y = 0$.

    (g) $y^{iv} + 2y'' + y = 0$.

    (h) $y''' - 5y'' + 3y' + y = 0$.

17. Encontre a solução do PVI:

    (a) $y'' + y - 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

(b) $y'' + 4y' + 5y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

(c) $9y'' - 12y' + 4y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$.

18. Suponha que as funções reais p e q são contínuas em um intervalo aberto I e seja $y = \phi(t) = u(t)+iv(t)$ uma solução complexa de
$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$
em que u e v são funcões reais. Mostre que u e v são também soluções desta equação. *Sugestão:* Substitua y por $\phi(t)$ na equação e separe em parte real em imaginária.

19. Determine os valores de α, se existirem, para os quais todas as soluções tendem a zero quando $t \to \infty$.

    (a) $y'' - (2\alpha - 1)y' + \alpha(\alpha - 1)y = 0$.

    (b) $y'' + (3 - \alpha)y' - 2(\alpha - 1)y = 0$.

20. Considere a EDOL homogênea $\mathcal{L}(y) = 0$ definida por $\mathcal{D}^2 - p_1(x)\mathcal{D} + p_0\mathcal{I}$, com p_1, p_0 contínuas em $\mathbb{R}$(EDOLHCV).

    (a) Se y e z são soluções definidas em toda a reta tais que $y(0) = 3, y'(0) = 1, z(0) = -1$ e $z'(0) = \frac{1}{3}$, mostre que $\{y, z\}$ é um conjunto linearmente independente em $\mathbb{R}$.

    (b) Mostre que $y(x) = x^2$ nunca poderá ser solução da EDO se p_1 e p_0 forem contínuas em $x = 0$.

    (c) Mostre que se o wronskiano de quaisquer duas soluções desta EDO é constante em $\mathbb{R}$ então $p_1 \equiv 0$ em $\mathbb{R}$.

21. Sejam y e z soluções da equação de Bessel $x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0, n \in \mathbb{N}$, definidas em $x > 0$ tais que $y(1) = 1, y'(1) = 0, z(1) = 0$ e $z'(1) = 1$. Calcule o wronskiano $W(y, z)(x)$.

22. Seja S o conjunto de todas as soluções da EDOL $y'' - y = 0$. Mostre que S é um espaço vetorial de dimensão 2. Determine uma base para S.

23. Dada a EDOLHVC $(y'' - 4y') + x^2(y' - 4y) = 0$, obtenha, por inspeção, uma solução não-nula e a seguir determine a solução geral da EDO.

24. Determine a solução geral de $(2x - 3x^2)y'' + 4y' - 6xy = 0$, sabendo que uma de suas soluções é um plonômio em x.

25. Cosidere o operador $\mathcal{L} = \mathcal{D}^2 + a\mathcal{D} + b\mathcal{I}$, em que a e b são constantes reais, e a EDOLH com coeficientes constantes (EDOLHCC) $\mathcal{L}(y) = 0$, definida em toda a reta, cuja equação característica $p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b\lambda = 0$ tenha raízes reias λ_1 e λ_2:

    (a) Sejam y_1 a solução do PVI $\mathcal{L}(y) = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$ e y_2 a solução do PVI $\mathcal{L}(y) = 0, y(0) = 1, y'(0) = 1$. Mostre que a solução do PVI $\mathcal{L}(y) = 0, y(0) = \alpha, y'(0) = \beta$ pode ser escrita como $y = \alpha y_1 + \beta y_2$.

    (b) Mostre que se $a > 0$ e $b > 0$ então todas as soluções de $\mathcal{L}(y) = 0$ tendem a zero quando $x \to \infty$.

    (c) Se $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, temos uma única solção na forma $y_1(x) = e^{\lambda x}$. Deduza a existência de uma solução da forma $y_2(x) = xe^{\lambda x}$ por meio do seguine argumento: *Quando* $\lambda_1 \neq \lambda_2$, *as soluções* $y_k(x) = e^{\lambda_k x}, k = 1, 2, \ldots$ *podem ser linearmente combinadas para formar a solução* $y(x) = \frac{y_1(x) - y_2(x)}{\lambda_1 - \lambda_2}$, *de modo que* $\lim_{\lambda_1 \to \lambda_2} y(x)$ *gera a solução* y_2 *desejada.*

26. Seja ϕ uma solução qualquer EDOLHCC $y'' + y = 0$:

    (a) Mostre que $\frac{d}{dx}((\phi')^2 + \phi^2) = 0$, ou seja, $(\phi')^2 + \phi^2 = cte$.

    (b) Se ϕ é a solução que satisfaz as condições iniciais $y(0) = a$ e $y'(0) = 0$ e P é um ponto de coordenadas (ϕ, ϕ') no plano Oyy'(plano de fase). Mostre que, à medida que x varia de 0 a 2π, o ponto $P = (\phi(x), \phi'(x))$ descreve uma circunferência no plano de fase.

27. Seja y a solução do PVI $y'' + 5y' + 6y = 0, x \geq 0; y(0) = 1, y'(0) = a$. Para quais valores de a tem-se $y(x) \geq 0$ quando $x \geq 0$?

28. Sabendo que $y(x) = 3e^x + e^{x^2}, z(x) = 7e^x + e^{x^2}$ e $w(x) = 5e^x + e^{-x^3} + e^{x^2}$ são soluções de uma EDOL não homogênea de segunda ordem $\mathcal{L}(y) = q, x \in \mathbb{R}$, determine a solução do PVI $\mathcal{L}(y) = q; y(0) = 1, y'(0) = 2$.