MAT-27 — Lista-11 — Novembro/2011

1. Determine os intervalos nos quais existem, com certeza, as soluções de:
   (a) $y^{iv} + 4y''' + 3y = t$
   (b) $ty''' + (\sin t)y'' + 3y = \cos t$
   (c) $t(t-1)y^{iv} + e^t y'' + 4t^2 y = 0$

2. Encontre o wronskiano de um conjunto fundamental de soluções para:
   (a) $y''' + 2y'' - y' - 3y = 0$
   (b) $y^{iv} + y = 0$

3. Se $x_1 = y$ e $x_2 = y'$, então a equção de segunda ordem

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

   Corresponde ao sistema

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -q(t)x_1 - p(t)x_2 \end{cases}$$

   Mostre que, se $x^{(1)}$ e $x^{(2)}$ formam um conjunto fundamental de soluções do sistema e $y^{(1)}$ e $y^{(2)}$ formam um cnjunto fundamental de soluções da equação, então

$$W[y^{(1)}, x^{(2)}] = cW[x^{(1)}, x^{(2)}]$$

   em que c é uma constante real não nula.

4. Encontre a solução geral de
   (a) $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$
   (b) $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$
   (c) $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$
   (d) $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$

5. Considere os vetores $\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} t^2 \\ 2t \end{bmatrix}$.
   (a) Calcule o wronskiano de $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$.
   (b) Em que intervalos $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$ são linearmente independentes?
   (c) Que conclusão pode-se tirar sobre os coeficientes o sistema homogêneo de equações diferenciais satisfeito por $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$?
   (d) Encontre esse sistema de equações e verifique as conclusões do item (c).

6. Encontre as soluções dos PVIs abaixo:

   (a) $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

   (b) $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{bmatrix} \mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

   (c) $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

   (d) $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

7. Encontre uma matriz fundamental para os sistemas:

   (a) $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}$

   (b) $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}$

8. Considere o operador $\mathcal{L} = \mathcal{D}^n + a_{n-1}\mathcal{D}^{n-1} + \ldots + a_0\mathcal{I}$, em que os coeficientes a_j são constantes reais e a EDOLHCC $\mathcal{L}(y) = 0$, definida sobre toda a reta, cuja equação característica é $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_0$.

   (a) Verifique que

      i. $\mathcal{L}(xe^{\lambda x}) = e^{\lambda x}\left[xp(\lambda) + \frac{\partial}{\partial\lambda}p(\lambda)\right]$.

      ii. $\mathcal{L}(x^m e^{\lambda x}) = \frac{\partial^m}{\partial\lambda^m}\mathcal{L}(e^{\lambda x})$.

   (b) Mostre que se $p(\lambda) = (\lambda - \alpha)^k r(\lambda)$, isto é, p tem raiz de multiplicidade k, $1 < k < n$, então $\frac{\partial^m}{\partial\lambda^m}\mathcal{L}(e^{\lambda x}) = 0$, ou seja, $\mathcal{L}(x^m e^{\lambda x}) = 0$, ou seja, existem exatamente k soluções de $\mathcal{L}(y) = 0$ associadas a esta raiz $\lambda = \alpha$ dadas por $y_m(x) = x^m e^{\alpha x}$, $0 \leq m \leq k-1$.

9. (a) Seja $\phi(t), t \in \mathbb{R}$, uma solução da EDOLHCC de segunda ordem $y'' + y' + y = 0, t \in \mathbb{R}$. Mostre que o vetor $\mathbf{x}(t) = [\phi(t)\ \phi'(t)]^T$ é a solução do sistema de EDOLHCC (SEDOLHCC) de primeira ordem $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, com $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$.

   (b) Seja $\mathbf{x}(t) = [\phi(t), \phi'(t)]^T$, $t \in \mathbb{R}$, uma solução do SEDOLHCC $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, com $\mathbf{A}$ dada no item anterior. Mostre que x_1 é solução da EDOLHCC $y'' + y' + y = 0$.

10. Converta o par de EDOLHCC $y'' + 3z + 2y = 0, t \in \mathbb{R}; z'' + 3y' + 2z = 0, t \in \mathbb{R}$, num SEDOLHCC de primeira ordem nas variáveis $x_1 = y; x_2 = y'; x_3 = z'; x_4 = z'$.

11. Justifique ou refute a seguinte afirmação: *"O conjunto de todas as soluções* $\mathbf{u} = [x\ y]^T$ *do SEDOL* $x' = y + 1; y' = x + 1$ *não é um espaço vetorial."*

12. Seja $\mathbf{x}$ uma matriz coluna de n funções reais de classe $C^1(\mathbb{R})$ e $\mathbf{u} \in \mathbb{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ um vetor não-nulo, e $\mathcal{L} = \mathcal{D} - \mathbf{A}$ um operador diferencial (vetorial) tal que $\mathcal{L}(\mathbf{x})(t) = \mathbf{x}'(t) - \mathbf{A}\mathbf{x}(t) = \mathbf{o}$ represente um SEDOLHCC de ordem n.

    (a) Calcule

       i. $\mathcal{L}(t\mathbf{u})$.

       ii. $\mathcal{L}(e^{\lambda t}\mathbf{u})$.

       iii. $\mathcal{L}((e^t + e^{-t})\mathbf{u})$.

       iv. $\mathcal{L}((e^t - e^{-t})\mathbf{u})$.

v. $\mathcal{L}((e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_2 t})\mathbf{u})$.

(b) Para quais funções $\phi(t)$ a função vetorial $\mathbf{x} = \phi(t)\mathbf{u}$ será solução de $\mathcal{L}(\mathbf{x})(t) = \mathbf{o}$?

(c) Mostre que $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda(t-t_0)}\mathbf{u}$, com t_0 uma constante, é uma solucão de $\mathcal{L}(\mathbf{x}) = \mathbf{o}$ quando $\mathbf{Au} = \lambda\mathbf{u}$.

13. Seja S o conjunto de todas as soluções de $\mathcal{L}(\mathbf{x}) = \mathbf{o}$, com $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{bmatrix}$. Mostre que $\mathbf{v}_1(t) = e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2(t) = e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v}_3(t) = e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}$ formam uma base de S.

14. Sabendo que $[(e^t + e^{2t})\ e^{2t}\ 0]^T$, $[(e^t + e^{3t})\ e^{3t}\ e^{3t}]^T$ e $[(e^t - e^{3t})\ \ -e^{3t}\ \ -e^{3t}]^T$ são soluções de um SEDOLHCC $\mathcal{L}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}' - \mathbf{Ax} = \mathbf{o}$, determine os autovalores e os autovetores de $\mathbf{A}$.

15. Dada a matriz quadrada $\mathbf{A}$, definamos $e^{\mathbf{A}t} \triangleq \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{A}t)^n}{n!}$.

(a) Mostre que $\frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}$.

(b) Se $\mathbf{A} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$, mostre que $e^{\mathbf{A}} = \operatorname{diag}(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, \dots, e^{\lambda_n})$.

(c) Mostre que $e^{\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT}} = \mathbf{T}^{-1}e^{\mathbf{A}}\mathbf{T}$.

16. Seja $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix} = \lambda\mathbf{I} + P$.

(a) Mostre que $\mathbf{P}^n$ é matriz nula.

(b) Mostre que $e^{mathbf{A}t} = e^{\lambda t}\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(\mathbf{P}t)^j}{j!}$.

17. Dado $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$ calcule $e^{\mathbf{A}t}$.

18. Seja $\mathbf{\Phi}(t)$ Matriz fundamental de soluções (MFS) de um SEDOLHCC $\mathcal{L}(\mathbf{x}) = \mathbf{o}$.

(a) Mostre que $\mathbf{\Phi}'(t) = \mathbf{A\Phi}(t)$.

(b) Mostre que $e^{\mathbf{A}(t-t_0)} = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}(t_0)$, de modo que a solução de um PVI $\mathcal{L}(\mathbf{x}) = \mathbf{o}, \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ pode ser escrita da forma $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}_0$.

19. Calcule $e^{\mathbf{A}t}$ para os seguintes casos:

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}$.

(b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$.

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$.

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

20. Resolva os PVIs $\mathcal{L}(\mathbf{x}) = \mathbf{o}, \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ em que as matrizes $\mathbf{A}$ que definem $\mathcal{L}$ são as dos exercício anterior.