MAT-27 — Lista-Extra — Outubro/2011

1. Seja A uma matriz de $M_n(\mathbb{C})$. Se A possui n autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ distintos dois a dois, então mostre que é LI o conjunto $\{u_1, \ldots, u_n\}$ formado pelos autovetores associados a cada autovalor.

2. Seja A uma matriz de $M_n(\mathbb{C})$ com n autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ distintos dois a dois. Seja B uma outra matriz de $M_n(\mathbb{C})$ tal que $AB = BA$. Mostre que é possível encontrar uma matriz $M \in M_n(\mathbb{C})$ tal que $M^{-1}AM$ e $M^{-1}BM$ são matrizes diagonais. Dica: pense nos autovetores de A e B.

3. Determinar os valores próprios e os vetores próprios do operador linear
$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad T(x, y, z) = (3x - y + z, -x + 5y - z, x - y + 3z).$$

4. Obtenha uma matriz P não singular tal que $P^{-1}AP$ seja diagonal:
$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

5. $v_1 = (1, -1)$ e $v_2 = (-1, 0)$ são dois vetores próprios de um operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ associados aos valores próprios $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -3$, respectivamente. Determinar $T(x, y)$.