MAT-27 — Prova 01 — Agosto/2011

Nome:_______________________________________ Turma:_______

Duração máxima: 100 min. Cada questão (de 1 a 10) vale 10 pontos.

1. Analise as seguintes afirmações, assinalando:

   - S: se a afirmação for válida sempre;
   - N: se a afirmação nunca for válida;
   - A: se a afirmação for válida algumas vezes (ao menos para um caso), porém não sempre.

   (a) (   ) Seja X um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$ e seja V o espaço vetorial de todas as funções de X em $\mathbb{R}$. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é limitada quando existe $k > 0$ (dependendo de f) tal que $|f(x)| \leq k$ para todo $x \in X$. Assim, o conjunto de funções $f : X \to \mathbb{R}$ limitadas é um subespaço de V.

   (b) (   ) A união de dois subespaços vetoriais é um subespaço vetorial.

   (c) (   ) Se o subespaço gerado pelo conjunto X está contido no subespaço gerado pelo conjunto Y, então o conjunto X está contido no conjunto Y.

   (d) (   ) Se U e V são dois subespaços de $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$, ambos com dimensão 2, então a soma $U + V$ é direta e é igual a $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$.

   (e) (   ) Se U é um subespaço de dimensão 4 do $\mathbb{R}^6$, então existe um conjunto LI Y de dois vetores de $\mathbb{R}^6$ que não pertencem a U de modo que $U \oplus [Y] = \mathbb{R}^6$

2. Para cada item a seguir, escreva S se o conjunto V for um EV sobre o corpo K ou N caso contrário. Considere as operações de soma vetorial e de multiplicação por escalar como sendo as usuais, exceto quando mencionado.

   (a) (   ) $V = \{x + iy \in \mathbb{C} \ / \ 3x = 2y\}$; $K = \mathbb{R}$.

   (b) (   ) $V = \{x + iy \in \mathbb{C} \ / \ 3x = 2y\}$; $K = \mathbb{C}$.

   (c) (   ) $V = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \ / \ a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Z}\}$; $K = \mathbb{R}$.

   (d) (   ) $V = \mathbb{R}^*_+$; $K = \mathbb{R}$; com as operações de soma: $x \oplus y = xy$, e multiplicação por escalar: $\alpha \odot x = x^\alpha$.

   (e) (   ) $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ f(x) = f(x + 1)\}$; $K = \mathbb{R}$.

3. Sejam os vetores $v_1 = (x_1, y_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2)$ de $\mathbb{R}^2$. Nos itens seguintes, assinale S se a função $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ constitui um produto interno no $\mathbb{R}^2$; caso contrário, assinale N.

   (a) (   ) $f(v_1, v_2) = 2x_1x_2 + 3y_1y_2$

   (b) (   ) $f(v_1, v_2) = x_1x_2 - 13y_1y_2$

   (c) (   ) $f(v_1, v_2) = x_1^2x_2 + y_1y_2^2$

   (d) (   ) $f(v_1, v_2) = 3x_1x_2 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3y_1y_2$

   (e) (   ) $f(v_1, v_2) = x_1x_2 + 13x_1y_2 + 13x_2y_1 + y_1y_2$

4. Fixe S uma matriz inversível de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$.

   (a) (5 pontos) Mostre que o conjunto

   $$V = \{A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) : S^{-1}AS \text{ é uma matriz diagonal de } \mathbb{M}_2(\mathbb{R})\}$$

   é um subespaço vetorial de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$. Este conjunto é conhecido como o conjunto das matrizes que são diagonalizadas por S.

   (b) (5 pontos) Obtenha uma base e a dimensão de V.

5. O posto de uma matriz é definido como o número (máximo) de colunas LI que ela possui. Seja A uma matriz $n \times n$ de posto n. Se $A^2 = A$, mostre que $A = I$.

6. Dada a matriz
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 1 \end{bmatrix},$$
encontre uma matriz L triangular inferior e uma matriz Q ortogonal de modo que $A = LQ$.

7. Determine os valores de x tal que os conjuntos abaixo sejam LI:

   (a) (5 pontos)$\{(x,1,2);(3,4,5);(6,7,8)\}$.

   (b) (5 pontos)$\{(x,1,2,3);(4,5,6,7);(8,9,10,11)\}$.

8. Considere o subespaço do $\mathbb{R}^4$: $W=[(1,1,1,1);(1,-1,1,-1)]$. Dado o vetor $v=(1,2,4,3)$, determine a projeção de v no complemento ortogonal de W.

9. Encontre a curva $y = C + D2^t$ que fornece a melhor aproximação com mínimos quadrados para as medidas $y = 28$ em $t = 0$, $y = 14$ em $t = 1$ e $y = 0$ em $t = 2$.

10. Obtenha a matriz de mudança de base M_{BC} entre as bases B e C de cada item seguinte:

(a) (5 pontos) $B = \{1, t, t^2, t^3\}$ e $C = \{1, (t-1), (t-1)^2, (t-1)^3\}$.

(b) (5 pontos) $B = \{1, \cos(x), \cos(2x), \cos(3x)\}$ e $C = \{1, \cos(x), \cos^2(x), \cos^3(x)\}$.