MAT-27 — Prova 02 — Setembro/2011

Nome:______________________________________ Turma:_______

Duração máxima: 100 min. Cada questão (de 1 a 10) vale 10 pontos.
Convenção: EV (espaço vetorial); TL (transformação linear); OL (operador linear);

1. Analise as seguintes afirmações, assinalando V se a afirmação for verdadeira, ou F se for falsa.

   (a) (   ) Seja V um EV euclidiano de dimensão n e seja $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ um subconjunto de V que não possui o vetor nulo como um de seus elementos. Se existe um OL linear $T : V \to V$ tal que $T(a_1) = a_1$ e $T(a_j) = a_j - a_{j-1},\ j = 2, 3, \ldots, n$, então pode-se dizer que S é LI.

   (b) (   ) Sejam U e V dois EV's de dimensão n. Assim, V é isomorfo a U e toda TL $T : V \to U$ é um isomorfismo entre os espaços.

   (c) (   ) Se U é um espaço hermiteano munido do produto interno $\langle .|. \rangle$, então dado um $\lambda \in \mathbb{R}^*$ a operação $f_\lambda : U \times U \to \mathbb{C},\ f(u, v) = \lambda \langle u|v \rangle$ define um segundo produto interno para o espaço U.

   (d) (   ) Se $R : U \to U$ é um OL no EV U tal que $R(u_1), \ldots, R(u_m)$ geram U, então $u_1, \ldots, u_m$ geram U.

   (e) (   ) Dado um EV V, um OL $F \in \mathcal{L}(V)$, e três vetores u, v, w satisfazendo $F(u) = F(v) + F(w)$, pode-se afirmar que $u = v + w$.

   (f) (   ) Toda matriz de $M_n(\mathbb{R})$ pode ser escrita como uma soma finita de matrizes (também de $M_n(\mathbb{R})$) de posto 1.

   (g) (   ) Se $G, H \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ são tais que a dimensão de $\mathrm{Im}(G)$ é igual à dimensão de $\mathrm{Im}(H)$, então $\dim \mathrm{Im}(G \circ H) = \dim \mathrm{Im}(H \circ G) = \dim \mathrm{Im}(G) = \dim \mathrm{Im}(H)$.

   (h) (   ) Para todo OL $F : U \to U$ no EV U, tem-se: $U = \mathrm{Ker}(F) \oplus \mathrm{Im}(F)$.

   (i) (   ) O núcleo de uma TL $G : \mathcal{P}_8(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^5$ tem dimensão maior ou igual 4.

   (j) (   ) Sejam U, V, W três EV's reais e sejam as TL's $A \in \mathcal{L}(U, V)$ e $B \in \mathcal{L}(V, W)$. Pode-se dizer que o posto da composta $B \circ A$ é menor ou igual ao posto de A e menor ou igual ao posto de B.

2. Em cada item a seguir, é mostrada uma aplicação entre dois EV's. Assinale S se a operação definir uma TL, ou N caso contrário.

   (a) (   ) $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad A(x, y, z) = (x, y + z + \exp(x) - 1)$.

   (b) (   ) $B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, \quad B(x, y, z) = (3x, -y, 7z, a)$, onde $a \in \mathbb{R}^*$.

   (c) (   ) $C : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \quad C(x, y, z, w) = (x, x, x)$.

   (d) (   ) $D : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n, \quad D([a_{ij}]_{n \times n}) = (a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$.

   (e) (   ) $E : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}), \quad E(f)(x) = 3f''(x) - 5f'(x) + f(x) + 15$.

   (f) (   ) $F : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}), \quad F(f)(x) = \cos(x) f''(x) - 10^x f'(x) + x f(x)$.

   (g) (   ) $G : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}), \quad G(f)(x) = f'(x) + 15(f(x))^2$.

   (h) (   ) $H : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad H\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = ad - bc$.

   (i) (   ) $S : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad S(M) = \mathrm{tr}(M)$.

   (j) (   ) $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad T(z) = z^*$, sendo z^* o complexo conjugado de z. Considere, para tanto, $\mathbb{C}$ EV sobre o corpo $\mathbb{C}$.

3. Considere $\mathbb{Z}_2$ o corpo formado pelos elementos $\{\tilde{0}, \tilde{1}\}$. As operações de soma e produto em $\mathbb{Z}_2$ são definidas como:

$$\tilde{1} + \tilde{0} = \tilde{0} + \tilde{1} = \tilde{1} \qquad \tilde{0} + \tilde{0} = \tilde{1} + \tilde{1} = \tilde{0},$$
$$\tilde{0}.\tilde{0} = \tilde{0}.\tilde{1} = \tilde{1}.\tilde{0} = \tilde{0} \qquad \tilde{1}.\tilde{1} = \tilde{1}.$$

Seja V um EV sobre $\mathbb{Z}_2$. Denote por $n(V)$ o número de elementos (distintos dois a dois) de V.

(a) (8 pontos) É possível que $n(V)$ seja exatamente 2015? Justifique.

(b) (2 pontos) Qual o menor valor possível de $n(V)$ maior ou igual a 2000?

4. Considere um OL T definido num EV real V de dimensão finita tal que $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Im}(T)$.

(a) (2 pontos) Mostre que a dimensão de V é par.

(b) (8 pontos) Para $V = \mathbb{R}^4$, construa um operador T que satisfaça isto.

5. Considere $\mathbb{C}^2$ EV sobre $\mathbb{C}$ com as operações usuais.

(a) (2 pontos) Defina um produto interno em $\mathbb{C}^2$ de modo que a norma induzida por este produto interno seja

$$||(a,b)|| = \sqrt{\frac{|a|^2}{4} + 25|b|^2}.$$

(b) (4 pontos) Mostre que a operação definida no item anterior obedece aos axiomas de um produto interno.

(c) (4 pontos) Obtenha um possível valor para $\alpha \in \mathbb{C}$ e para $\beta \in \mathbb{C}$ para que o conjunto $B = \{(1+i, \frac{1-i}{10}); \alpha(10+10i, \beta)\}$ seja uma base ortonormal de $\mathbb{C}^2$ (com relação ao produto interno definido em (a)).

6. Considere o OL T definido em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$. Dica:

$$\begin{aligned}(x,y,z) &= \frac{(x+y)}{2}(1,1,-1)+\frac{(x+z)}{2}(1,-1,1)+\frac{(y+z)}{2}(-1,1,1)\\ &= \frac{(x+y-z)}{2}(1,1,0)+\frac{(x-y+z)}{2}(1,0,1)+\frac{(-x+y+z)}{2}(0,1,1)\end{aligned}$$

(a) (5 pontos) Se $T(x,y,z)=(2x-y+z,2x-y,2x-z)$, determine a matriz de T em relação à base $B=\{(1,1,0);(1,0,1);(0,1,1)\}$.

(b) (5 pontos) Se a matriz de T em relação à base $C=\{(1,1,-1);(1,-1,1);(-1,1,1)\}$ é

$$[T]_C=\begin{bmatrix}2&0&0\\1&1&1\\0&2&0\end{bmatrix},$$

obtenha $T(x,y,z)$.

7. Seja U um EV sobre $\mathbb{C}$, munido de um produto interno $\langle .,. \rangle$. Se U é finitamente gerado, mostre que a matriz de mudança de base entre duas bases ortonormais de U é uma matriz unitária.
OBS.: Uma matriz A complexa $n\times n$ é dita ser unitária quando $A^\dagger A = AA^\dagger = I$, onde $A^\dagger$ é matriz adjunta hermitiana de A: $A^\dagger = (A^*)^T$ – transposta da conjugada.

8. Considere o OL $S : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ cuja matriz em relação à base $B = \{1+t, 1+t^2, t+t^2\}$ é:

$$[S]_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

Obtenha

(a) (4 pontos) O posto de S.

(b) (3 pontos) A nulidade de S.

(c) (3 pontos) Se $R : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ é um OL cuja matriz em relação à base canônica C é:

$$[R]_C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix},$$

verifique (justificando) se $R \circ S$ é um isomorfismo.

9. Um certo circuito é composto exclusivamente por uma rede de resistores e duas fontes de tensão. Este circuito se encontra montado numa espécie de caixa preta (*black box*) de modo que não se tem acesso à montagem. A caixa preta possui um terminal onde se pode monitorar a tensão V com um voltímetro e outros terminais onde é possível conectar duas fontes de alimentação. Sejam e_1 e e_2 as tensões das fontes de alimentação. Um circuito como este é linear, e, por isso mesmo, a tensão entre dois quaiquer pontos do circuito é uma TL de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$, ou seja, depende linearmente de e_1 e e_2. Com o objetivo de averiguar esta dependência (para com e_1 e e_2) da tensão V, um estudante fez um experimento: para as tensões de entrada de $e_1 = 2.0$V e $e_2 = 1.0$V, foi medido $V = 0.90$V; ao passo que para as tensões de entrada de $e_1 = 1.0$V e $e_2 = 2.0$V, foi observado uma tensão de $V = 0.60$V na saída.

   (a) (5 pontos) Qual a tensão que seria observada se $e_1 = 1.0$V e e_2 fosse posta em curto (isto é, $e_2 = 0$V)?

   (b) (5 pontos) Qual a tensão que seria observada se $e_2 = 1.0$V e e_1 fosse posta em curto (isto é, $e_1 = 0$V)?

10. Considere o OL $F : \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ tal que $F(p)$ é o polinômio (em t) definido por:

$$\lim_{z \to t} \frac{1}{z} \int_0^z p(x)dx.$$

Por outro lado, seja o OL $G : \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$

$$G(p(t)) = \frac{d}{dt}(tp(t)) - \frac{3}{2}t\frac{dp}{dt}(t).$$

Os operadores F e G são idênticos? Justifique.