MAT-27 — Prova 03 — Novembro/2011

Nome:____________________________________ Turma:_______

Duração máxima: 120 min.

1. (30 pontos) Seja $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ um operador linear definido por: $F(X) = AX - XA$, onde $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Para responder às seguintes questões, considere, quando necessário, o produto interno usual em $M_2(\mathbb{R})$. Dado:

$$F\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad F\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$F\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad F\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

   (a) (4 pontos) Tome uma base B de $M_2(\mathbb{R})$ e obtenha a matriz $[F]_B$.

   (b) (3 pontos) F é auto-adjunto? Explique.

   (c) (3 pontos) F é uma isometria? Explique.

   (d) (8 pontos) Qual o polinômio característico de F?

(e) (2 pontos) Quais são os autovalores de F?

(f) (2 pontos) F é diagonalizável? Explique.

(g) (8 pontos) Obtenha dois autovetores LI de F associados a autovalores distintos.

2. (10 pontos) Seja $V = \mathbb{R}^3$. Considere o subespaço $W^* \subset V^*$ gerado pelos funcionais F e G dados por $F(x, y, z) = x - y$ e $G(x, y, z) = y - 2z$. Determinar uma base do seguinte subespaço de V:

$$U = \{u \in V \mid H(u) = 0, \forall H \in W^*\}.$$

3. (18 pontos) Seja B uma base do $\mathbb{R}^3$. Considere $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ o operador cuja matriz em relação a B seja:

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Discuta todas as possibilidades de T ser (ou não) diagonalizável em função de $a \in \mathbb{R}$.

4. (15 pontos) Determine a expressão $T(x, y)$ de um operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cujos autovalores sejam 7 e 15 e cuja representação matricial na base canônica não seja diagonal, sabendo que:

   (a) (5 pontos) T não é auto-adjunto.

   (b) (10 pontos) T é auto-adjunto.

5. (10 pontos) Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 15 & 3 \\ 0 & 15 \end{bmatrix}.$$

obtenha e^{At}, sendo $t \in \mathbb{R}_+^*$.

6. (12 pontos) Para cada matriz a seguir, obtenha a forma canônica de Jordan, escreva seu polinômio mínimo e seu polinômio característico. Não é necessário justificar.

   (a) (3 pontos) $A = \begin{bmatrix} 3 & 15 \\ 0 & 15 \end{bmatrix}$

   (b) (3 pontos) $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

   (c) (3 pontos) $C = \begin{bmatrix} 15 & 15 & 15 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

   (d) (3 pontos) $D = \begin{bmatrix} 15 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}$

7. (5 pontos) Esta questão aborda uma relação bastante interessante entre as matrizes do jogo Sudoku e a turma 15. Uma matriz deste jogo é 9×9 e formada apenas por elementos inteiros de 1 a 9. Em cada linha da matriz, os números de 1 a 9 ocorrem exatamente uma vez. Em cada coluna da matriz, acontece o mesmo: os números de 1 a 9 aparecem exatamente uma vez. Além disso uma matriz M do jogo é composta por nove submatrizes 3×3, $M_1, M_2, \ldots, M_9$, e cada uma das submatrizes tem os números de 1 a 9 como os seus elementos (cada número ocorrendo exatamente uma vez para cada submatriz). A matriz M pode ser escrita como:

$$M = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 & M_3 \\ M_4 & M_5 & M_6 \\ M_7 & M_8 & M_9 \end{bmatrix}$$

Seja A uma matriz deste jogo Sudoku.

(a) (3 pontos) Mostre que a matriz A tem um autovalor inteiro que é múltiplo de 15.

(b) (2 pontos) Mostre que o determinante de A também é um número inteiro múltiplo de 15.