MAT-27 — Prova 04 — Novembro/2011

Nome:____ Turma:_______

Duração máxima: 120 min.

1. (10 pontos) Qual o curso de Engenharia que você pretende fazer? Por que um aluno matriculado neste curso de Engenharia deve aprender EDO's? Faça um breve texto (2 parágrafos no máximo), abordando este assunto.

2. (6 pontos) Analise se as afirmações seguintes são verdadeiras (V) ou falsas (F)

   (a) (   ) Se $p(t)$ e $q(t)$ são funções contínuas no intervalo aberto I, então a *única* solução do PVI
   $$y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = 0, \qquad \forall t \in I,$$
   $$y(t_0) = y'(t_0) = 0, \qquad t_0 \in I,$$
   é a função identicamente nula.

   (b) (   ) Sejam $f(t)$ e $g(t)$ duas funções de classe $C^1(\mathbb{R})$. Se o determinante Wronskiano $W[f,g](t)$ for identicamente nulo $\forall t \in \mathbb{R}$, então as funções $f(t)$ e $g(t)$ são LD.

   (c) (   ) Se $f(t)$ e $g(t)$ são funções de classe C^1 num intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$, então o determinante wronskiano $W[f,g](t)$ ou é identicamente nulo em I ou nunca se anula em I.

   (d) (   ) A função $h(t) = e^{t^2} - 1$ nunca poderá ser solução de uma EDO $y''(t)+p(t)y'(t)+q(t)y(t) = 0$ se as funções $p(t)$ e $q(t)$ forem contínuas num intervalo I aberto contendo a origem.

   (e) (   ) O PVI
   $$y'(x) + x^{2007}y(x) = 2015\frac{\cos(x)}{x} \qquad x > 0, \qquad y(1) = 1,$$
   admite uma única solução de classe C^1 em $(0, \infty)$.

   (f) (   ) Se $p(t)$, $q(t)$ e $h(t)$ são funções contínuas no intervalo aberto I, então o conjunto solução da EDO
   $$y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = h(t), \qquad \forall t \in I,$$
   é um subespaço vetorial de $C^2(I)$ com dimensão 2.

3. (40 pontos) Forneça a solução geral das seguintes EDO's:

(a) (5 pontos) $\frac{1}{4}y'(x) + x^3 y(x) = x^3$.

(b) (5 pontos) $y''(x) + 7y'(x) + 10y(x) = 0$.

(c) (5 pontos) $8\frac{d^3u}{dt^3} + 12\frac{d^2u}{dt^2} + 6\frac{du}{dt} + u = 0$.

(d) (5 pontos) $\frac{d^4u}{dt^4} + 8\frac{d^2u}{dt^2} + 16u = 0$.

(e) (5 pontos) $ty'' + y' = t, \quad t > 0.$

(f) (5 pontos) $y''' + 2y'' - 6y' + 8y = 0.$

(g) (5 pontos) $\ddot{y} + 2\dot{y} + 17y = 0.$

(h) (5 pontos) $\ddot{y} + 8\dot{y} + 16y = 0.$

4. (12 pontos) Considere a EDO:

$$t^2 y''(t) - t y'(t) + y(t) = 0, \qquad t > 0.$$

(a) (3 pontos) Classifique esta EDO quanto à linearidade ou não linearidade, quanto à natureza dos coeficientes, e quanto à homogeneidade.

(b) (4 pontos) Se $u(t)$ e $v(t)$ constituem um conjunto fundamental de soluções desta EDO, obtenha o determinante wronskiano $W[u, v](t)$ a menos de uma constante multiplicativa $C \in \mathbb{R}$. Esta constante C pode ser igual a zero?

(c) (5 pontos) Sabendo que $u(t) = t$ é uma solução desta EDO, obtenha a única solução $\phi(t)$ de classe $C^2(\mathbb{R}_+^*)$ que satisfaz a EDO e as condições iniciais:

$$\phi(1) = 1 \qquad \phi'(1) = 0.$$

5. (16 pontos) Classifique as EDO's seguintes de acordo com o seguintes código:

   - Diga se é linear ou não-linear e forneça a ordem da EDO.
   - Se for linear, diga se é homogênea ou não-homogênea; a coeficientes variáveis ou a coeficientes constantes.

   (a) (4 pontos) $x'(t) + \cos(t) = x''(t) - x(t)$.

   (b) (4 pontos) $x''(t) - 13x'(t) + 13x(t) = \sin(x(t))$.

   (c) (4 pontos) $y(x) = x^2 + [y'(x)]^2$.

   (d) (4 pontos) $u'''(t) + t^2u''(t) + tu'(t) = u(t)$.

6. (9 pontos) Nos problemas seguintes, determine (sem resolver a EDO) o maior intervalo aberto I no qual se pode garantir a existência e a unicidade de solução para $t \in I$.

   (a) (3 pontos) $(t-5)y^{(4)} + (t-4)y'' + (\tan t)y = 0 \qquad y(2) = y'(2) = y''(2) = y'''(2) = 1$.

   (b) (3 pontos) $(t-2)y'' + ty' - [\cos(t-2)]y = \sin(t-2) \qquad y(4) = y'(4) = 0$.

   (c) (3 pontos) $ty' + (t-15)y = 2te^t \qquad y(1) = 0$.

7. (10 pontos) A população de mosquitos em determinada área cresce a uma taxa proporcional à população atual e, na ausência de outros fatores, a população dobra a cada semana. Existem, inicialmente, 200 mil mosquitos na área e os predadores (pássaros, morcegos, etc.) comem 20 mil mosquitos por dia. Seja $y(t)$ a quantidade de mosquitos na área num certo instante t dado em dias. Obtenha a função $y(t)$, tratando $y(t)$ e t como variáveis contínuas (em vez de variáveis discretas como se poderia supor). Se necessário, utilize a aproximação $140000/(\ln 2) \cong 201977$.