4.4.2 – Diagonalização de operadores ortogonais

Seja U um EV euclideano de dimensão 2. Examinaremos a natureza de um operador ortogonal[1] $T : U \to U$. Seja $B = \{u, v\}$ uma base ortonormal de U, de sorte que:

$$[T]_B = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}.$$

Como $[T]_B$ é uma matriz ortogonal, as seguintes condições devem ser obedecidas:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 1 && (1) \\ c^2 + d^2 &= 1 && (2) \\ ac + bd &= 0 && (3) \end{aligned}$$

De (1) e (2), podemos escrever:

$$a = \cos\theta \qquad b = \sin\theta$$

$$c = \sin\phi \qquad d = \cos\phi$$

sendo θ e ϕ ângulos no intervalo $(-\pi, \pi]$. De (3), podemos afirmar que

$$\sin(\theta + \phi) = 0$$

ou seja $\theta + \phi = 0$, ou $\theta + \phi = \pm\pi$, ou ainda $\theta + \phi = 2\pi$ (neste último caso, $\theta = \pi$ e $\phi = \pi$). De qualquer forma, a matriz $[T]_B$ assumirá uma das duas formas a seguir:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$$

No primeiro caso $p_T(\lambda) = \lambda^2 - 2(\cos\theta)\lambda + 1$. Neste caso, as raízes são complexas sempre que $\theta \neq 0$ e $\theta \neq \pi$.
No segundo caso $p_T(\lambda) = \lambda^2 - 1$ e os autovalores são $\lambda = \pm 1$.

Conclusão: Num EV de dimensão 2, um operador ortogonal obedecerá uma das quatro condições a seguir:

1. T não é diagonalizável e sua matriz em relação a uma base ortonormal é da forma:

   $$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

   para $\theta \neq 0$ e $\theta \neq \pi$.

2. T admite a forma diagonal:

   $$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. T admite a forma diagonal:

   $$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

[1] Em nosso curso, operador ortogonal e isometria são sinônimos.

4. T admite uma das formas diagonais:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Teorema 13: Seja T um operador ortogonal num EV euclideano de dimensão finita e não nula. Existe uma base ortonormal deste EV relativamente à qual a matriz de T tem a forma:

$$\begin{bmatrix} 1 &&&&&&&&&& \\ & \cdots &&&&&&&&& \\ && 1 &&&&&&&& \\ &&& -1 &&&&&&& \\ &&&& \cdots &&&&&& \\ &&&&& -1 &&&&& \\ &&&&&& \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 &&& \\ &&&&&& \sin\theta_1 & \cos\theta_1 &&& \\ &&&&&&&& \cdots && \\ &&&&&&&&& \cos\theta_k & -\sin\theta_k \\ &&&&&&&&& \sin\theta_k & \cos\theta_k \end{bmatrix}$$

OBS1: Todos os elementos que não aparecem na matriz anterior são nulos.
OBS2: A matriz referente ao Teorema 13 pode não possuir elementos iguais a 1, ou a -1, como também pode não conter nenhum dos blocos 2×2 característicos das rotações.