Mecânica I (FIS-14)

Prof. Dr. Ronaldo Rodrigues Pelá
Sala 2602A-1
Ramal 5785
rrpela@ita.br
www.ief.ita.br/~rrpela

Onde estamos?

- Nosso roteiro ao longo deste capítulo
  - Cinemática retilínea: movimento contínuo
  - Cinemática retilínea: movimento irregular
  - Movimento curvilíneo geral
  - Movimento curvilíneo: componentes retangulares
  - Movimento de um projétil
  - **Movimento curvilíneo: componentes normal e tangencial**
  - **Movimento curvilíneo: componentes cilíndricas**
  - Análise do movimento absoluto dependente de duas partículas
  - Movimento relativo de duas partículas usando eixos de translação
  - Movimento relativo de duas partículas usando eixos de rotação

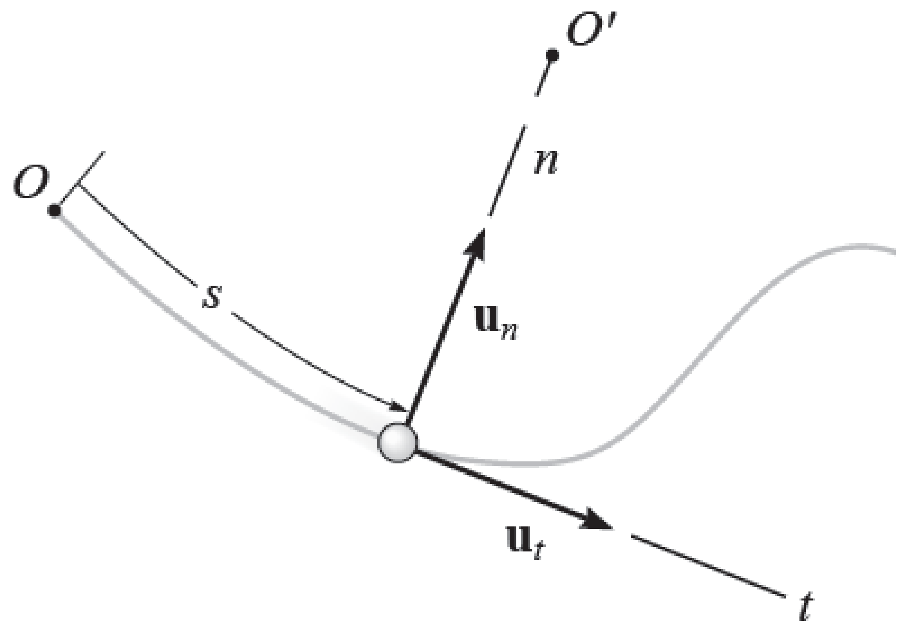
2.7 – Movimento curvilíneo: componentes normal e tangencial

Movimento curvilíneo: componentes normal e tangencial

Quando a trajetória ao longo da qual uma partícula se move é *conhecida*, costuma ser conveniente descrever o movimento utilizando-se eixos de coordenadas *n* e *t* os quais atuam normal e tangente à trajetória, respectivamente, e no instante considerado tem sua *origem localizada na partícula*.

2.7 – Movimento curvilíneo: componentes normal e tangencial

Movimento plano



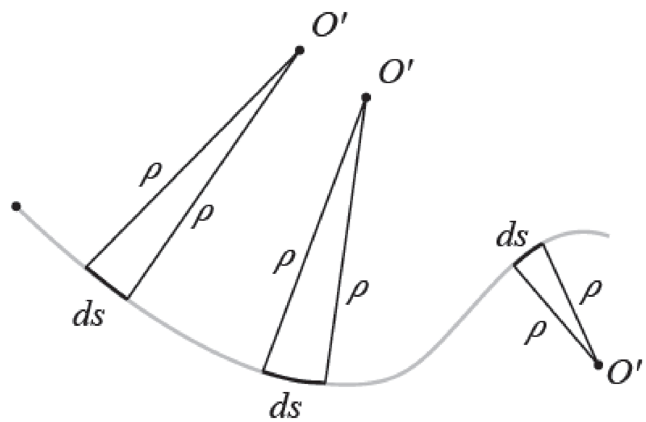
Posição

Considere a partícula mostrada na Figura acima, que se move em um plano ao longo de uma curva fixa tal que em dado instante ela está na posição *s*, medida a partir do ponto *O*.

2.7 – Movimento curvilíneo: componentes normal e tangencial

Movimento plano

A única escolha para o *eixo normal* pode ser feita observando-se que geometricamente a curva é construída a partir de uma série de segmentos do arco diferenciais *ds*,



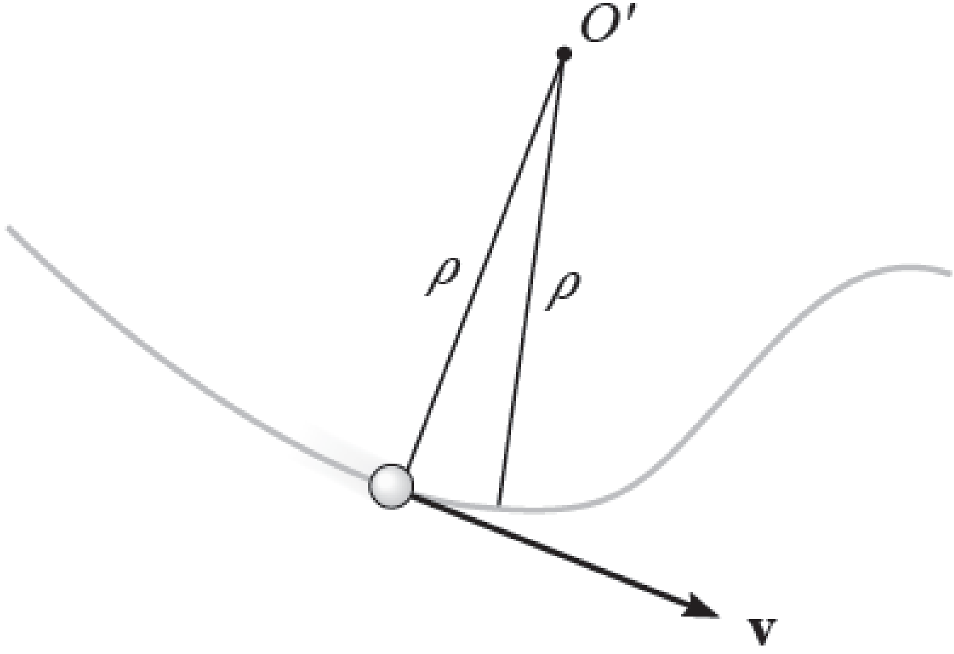
Raio da curva

O plano que contém os eixos *n* e *t* é referido como o *plano osculador*, e nesse caso ele é fixo no plano do movimento.

2.7 – Movimento curvilíneo: componentes normal e tangencial

Velocidade

A velocidade da partícula **v** tem uma *direção* que é sempre tangente à trajetória,



Velocidade

Desse modo,

$$\mathbf{v} = v\mathbf{u}_t$$

onde:

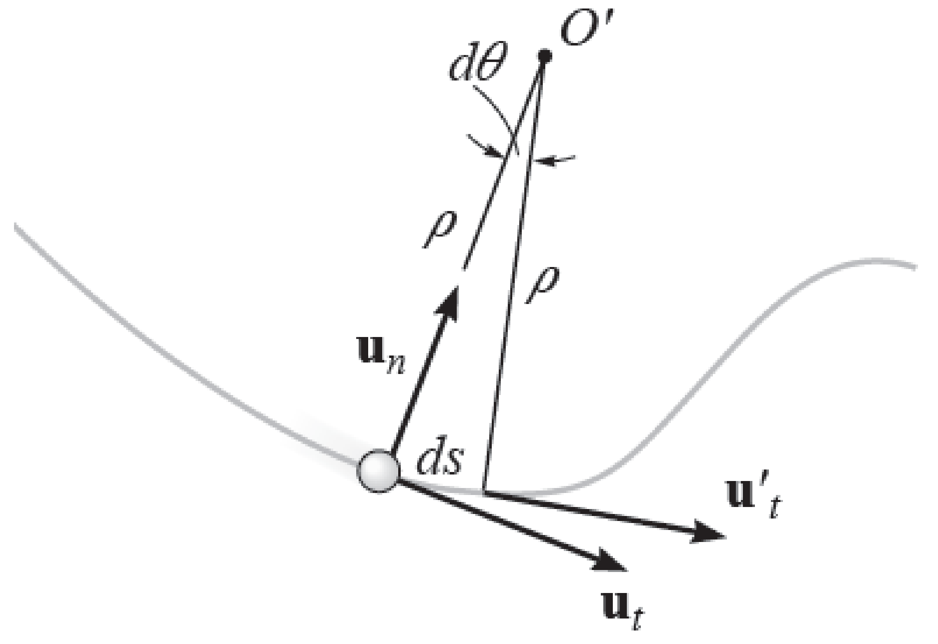
$$v = \dot{s}$$

2.7 – Movimento curvilíneo: componentes normal e tangencial

Aceleração

A aceleração da partícula é a taxa de variação temporal da velocidade. Assim,

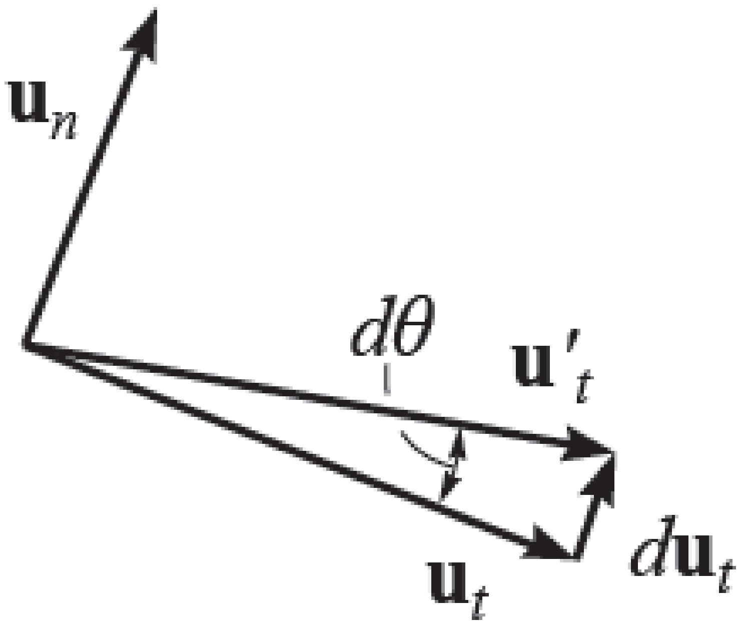
$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \dot{v}\mathbf{u}_t + v\dot{\mathbf{u}}_t$$



2.7 – Movimento curvilíneo: componentes normal e tangencial

Aceleração

Como mostrado na Figura abaixo, precisamos $\mathbf{u}'_t = \mathbf{u}_t + d\mathbf{u}_t$.



$$a_n = v||\dot{\mathbf{u}}_t||$$

$$||\dot{\mathbf{u}}_t|| = ||\mathbf{u}_t||\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{\rho}$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

2.7 – Movimento curvilíneo: componentes normal e tangencial

Aceleração

a pode ser escrita como a soma de suas duas componentes,

$$\mathbf{a} = a_t\mathbf{u}_t + a_n\mathbf{u}_n$$

onde:

$$at = \dot{v} \quad \text{ou} \quad a_t\,ds = v\,dv$$

e

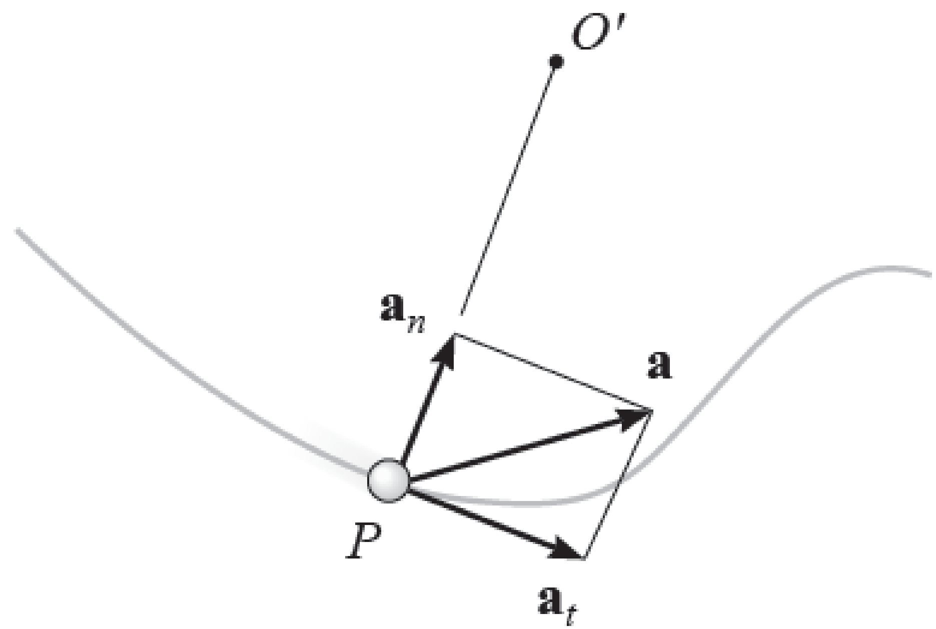
$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

2.7 – Movimento curvilíneo: componentes normal e tangencial

Aceleração

Essas duas componentes mutuamente perpendiculares são mostradas na Figura abaixo. Portanto, a *intensidade* da aceleração é o valor positivo de:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

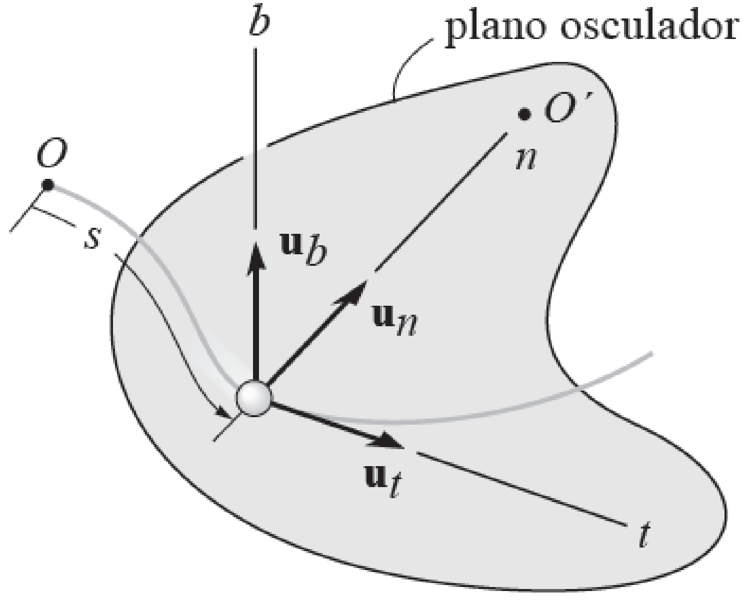


Aceleração

2.7 – Movimento curvilíneo: componentes normal e tangencial

Movimento tridimensional

Conhecendo $\mathbf{u}_t$ e $\mathbf{u}_n$, podemos determinar o versor $\mathbf{u}_b$: $\mathbf{u}_b = \mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_n$.



2.7 – Movimento curvilíneo: componentes normal e tangencial

Exercício

- Se a trajetória é expressa como $y = f(x)$, o raio da curvatura ρ em qualquer ponto sobre a trajetória é determinado pela equação:

$$\rho = \frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{|d^2y/dx^2|}$$

2.7 – Movimento curvilíneo: componentes normal e tangencial

Por um lado: $||\vec{a}\times\vec{v}|| = a_n v = \dfrac{v^3}{\rho}$

Por outro lado: $\vec{v} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} \quad \vec{a} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} \Rightarrow ||\vec{a}\times\vec{v}|| = |\ddot{x}\dot{y} - \ddot{y}\dot{x}|$

O que implica: $\rho = \dfrac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}{|\ddot{x}\dot{y} - \ddot{y}\dot{x}|}$

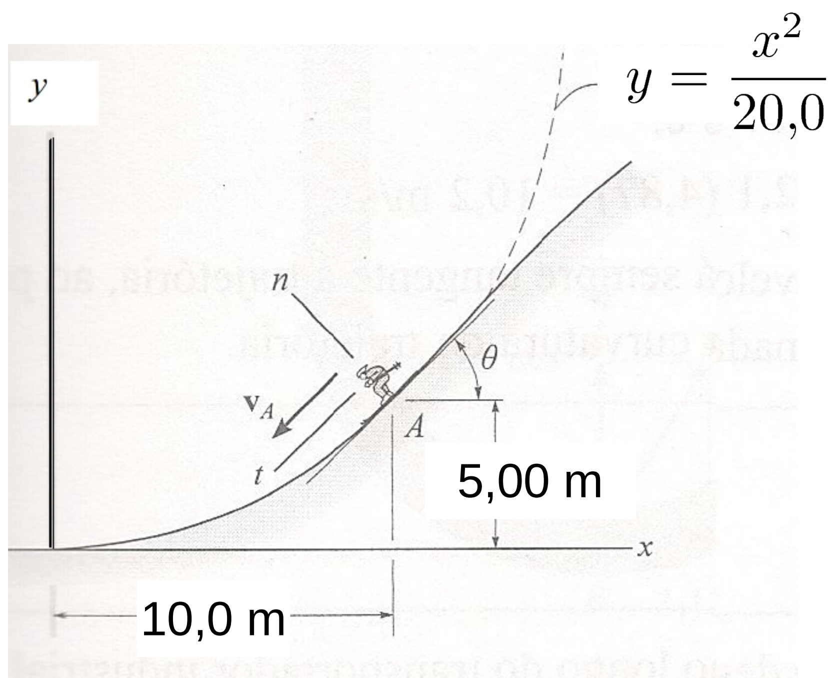
Reescrevendo: $\rho = \dfrac{\dot{x}^3\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{|\ddot{x}\dot{y} - \ddot{y}\dot{x}|}$

Mas: $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}\right) = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)\dfrac{1}{\dot{x}} = \dfrac{(\ddot{x}\dot{y} - \ddot{y}\dot{x})}{\dot{x}^2}\dfrac{1}{\dot{x}}$

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}$$

2.7 – Movimento curvilíneo: componentes normal e tangencial

- Exemplo: Quando o esquiador alcança o ponto *A* ao longo de sua trajetória parabólica, ele tem uma velocidade escalar de 6,00 m/s que está aumentando em 2,00 m/s^2. Determine a direção de sua velocidade e a direção e a intensidade da sua aceleração neste instante. Despreze o tamanho do esquiador no cálculo.



2.7 – Movimento curvilíneo: componentes normal e tangencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{10}$$ Para $x = 10{,}0\ \mathrm{m}$ $$\frac{dy}{dx} = 1$$

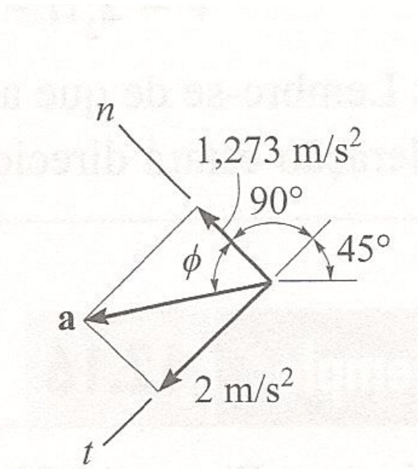
$\theta = 225{,}0^\circ$ (ângulo que a velocidade faz a direção positiva de x)

$$\vec{a} = \dot{v}\hat{u}_t + (v^2/\rho)\hat{u}_n \qquad \rho = \frac{\left[1 + (dy/dx)^2\right]^{3/2}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}$$

Para $x = 10{,}0\ \mathrm{m}$ $\rho = 28{,}28\ \mathrm{m}$

$$\vec{a} = 2\hat{u}_t + (1{,}273)\hat{u}_n \qquad a = 2{,}37\ \mathrm{m/s^2}$$

$$\tan\phi = \frac{2}{1{,}273} \qquad \phi = 57{,}5^\circ$$



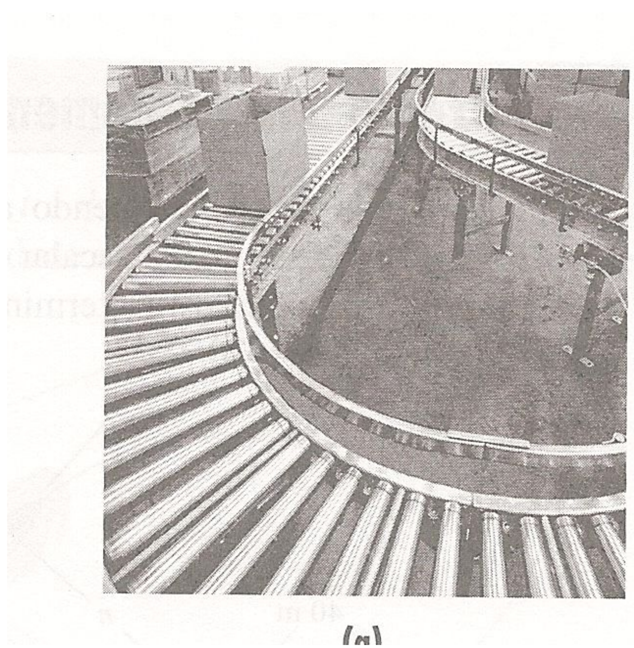
$\alpha = 192{,}5^\circ$ (ângulo que a aceleração faz a direção positiva de x)

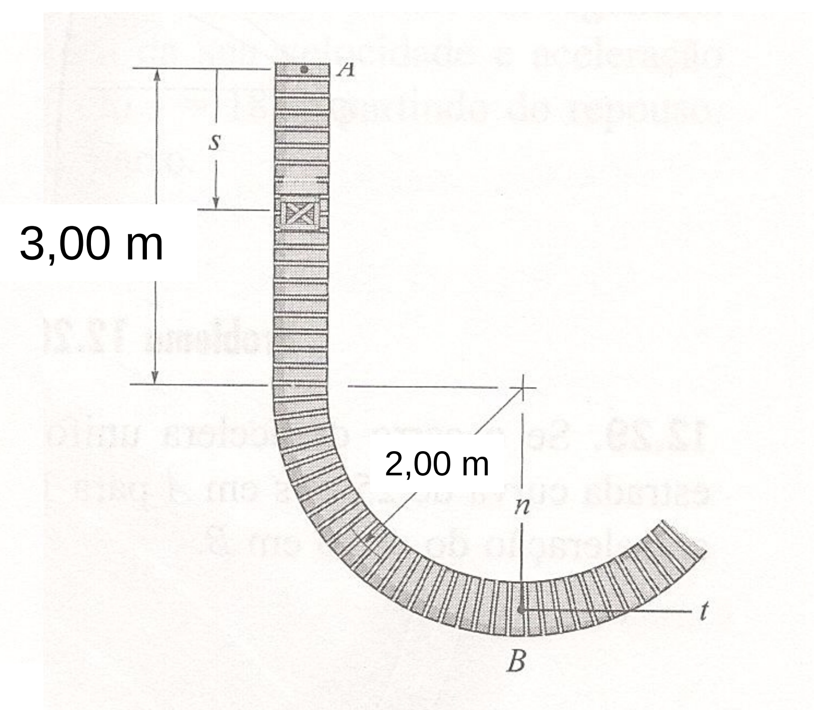
2.7 – Movimento curvilíneo: componentes normal e tangencial

- Exemplo: As caixas deslocam-se ao longo do transportador industrial. Se uma caixa parte do repouso em *A* e aumenta sua velocidade escalar de tal maneira que

$$a_t = (0{,}200t)\ \mathrm{m/s}^2$$

onde *t* é dado em s, determine a intensidade da sua aceleração quando ela chega ao ponto B





2.7 – Movimento curvilíneo: componentes normal e tangencial

$$\dot{v} = 0{,}2t \qquad v = 0{,}1t^2 \qquad s = \frac{0{,}1}{3}t^3$$

Para chegar a B, percorre uma distância de $(3 + \pi)\ \mathrm{m} \cong 6{,}142\ \mathrm{m}$

O que leva um tempo de $t = 5{,}690\ \mathrm{s}$

$$\vec{a} = \dot{v}\hat{u}_t + (v^2/\rho)\hat{u}_n$$

Para $t = 5{,}690\ \mathrm{s}$ $\qquad \vec{a} = 1{,}138\hat{u}_t + \dfrac{(3{,}238)^2}{2}\hat{u}_n$

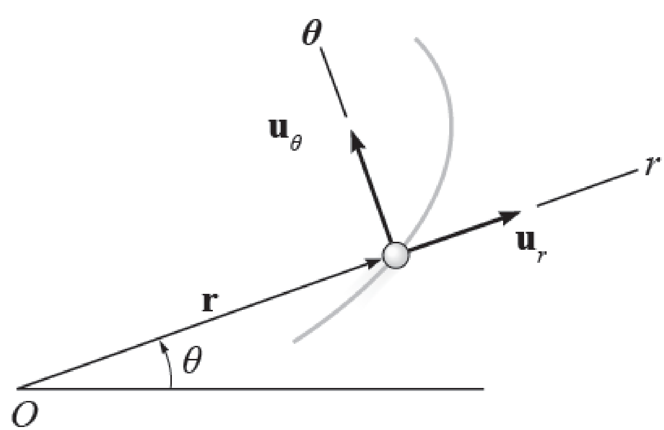
$$a = 5{,}36\ \mathrm{m/s^2}$$

2.8 – Movimento curvilíneo: componentes cilíndricas

Às vezes, o movimento da partícula está restrito a uma trajetória que é mais bem descrita utilizando-se coordenadas cilíndricas. Se o movimento é restrito ao plano, então coordenadas polares são usadas.

Coordenadas polares

Podemos especificar a posição da partícula utilizando uma *coordenada radial* r, que se estende para fora a partir da origem fixa O até a partícula, e a *coordenada transversal* θ, que é o ângulo no sentido anti-horário entre uma linha de referência fixa e o eixo r.



Posição

2.8 – Movimento curvilíneo: componentes cilíndricas

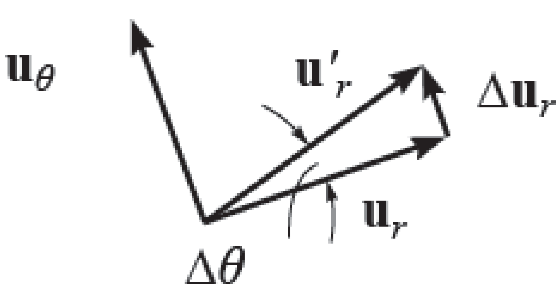
Posição

Em qualquer instante, a posição da partícula é definida pelo vetor posição:

$$\mathbf{r} = r\mathbf{u}_r$$

Velocidade

A variação temporal de u_r é, então, Δu_r. Para ângulos $\Delta\theta$ pequenos esse vetor tem uma intensidade $\Delta u_r \approx 1\ (\Delta\theta)$ e age na direção $\mathbf{u}_\theta$. Portanto, $\Delta\mathbf{u}_r = \Delta\theta\mathbf{u}_\theta$, e assim, $\dot{\mathbf{u}}_r = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta \mathbf{u}_r}{\Delta t} = \left(\lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}\right)\mathbf{u}_\theta$



$$\dot{\mathbf{u}}_r = \dot{\theta}\mathbf{u}_\theta$$

2.8 – Movimento curvilíneo: componentes cilíndricas

Velocidade

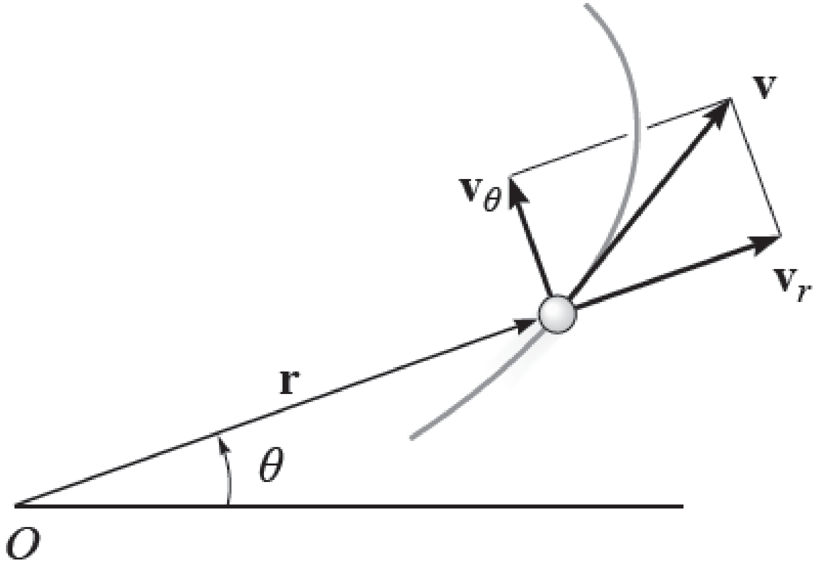
A velocidade pode ser escrita na forma de componentes como:

$$\mathbf{v} = v_r \mathbf{u}_r + v_\theta \mathbf{u}_\theta$$

onde:

$$v_r = \dot{r}$$

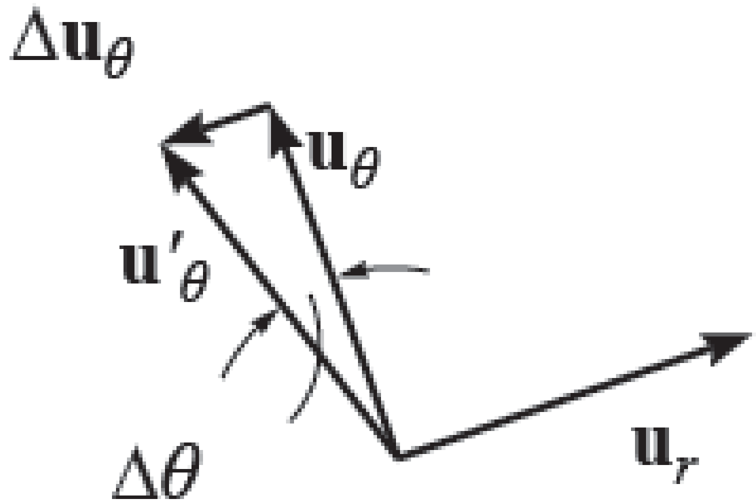
$$v_\theta = r\dot{\theta}$$



Velocidade

2.8 – Movimento curvilíneo: componentes cilíndricas

Aceleração



$$\dot{\mathbf{u}}_\theta = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{u}_\theta}{\Delta t} = -\left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right)\mathbf{u}_r$$

$$\dot{\mathbf{u}}_\theta = -\dot{\theta}\,\mathbf{u}_\mathbf{r}$$

2.8 – Movimento curvilíneo: componentes cilíndricas

Aceleração

Podemos escrever a aceleração na forma de componentes como:

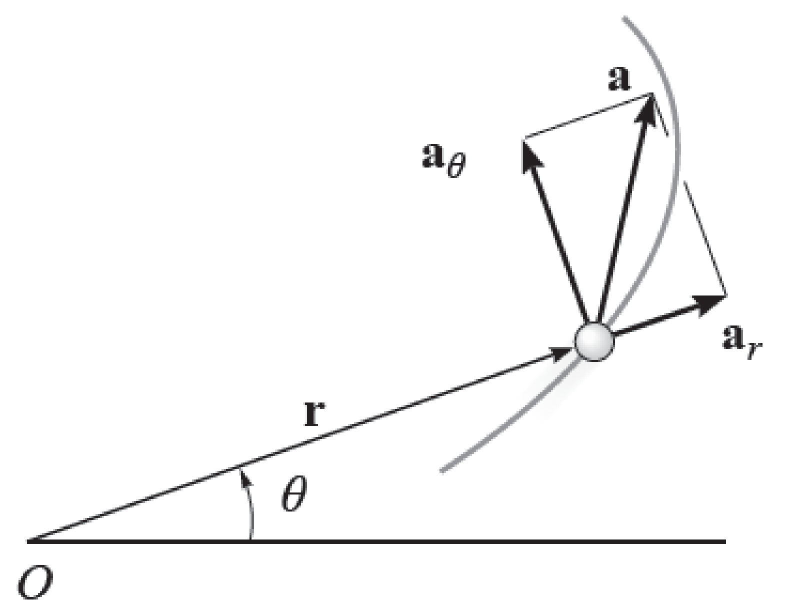
$$\mathbf{a} = a_r \mathbf{u}_r + a_\theta \mathbf{u}_\theta$$

onde:

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$
$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

Visto que $\mathbf{a}_r$ e $\mathbf{a}_\theta$ são sempre perpendiculares, a *intensidade* da aceleração é simplesmente o valor positivo de:

$$a = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)^2 + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})^2}$$



Aceleração

2.8 – Movimento curvilíneo: componentes cilíndricas

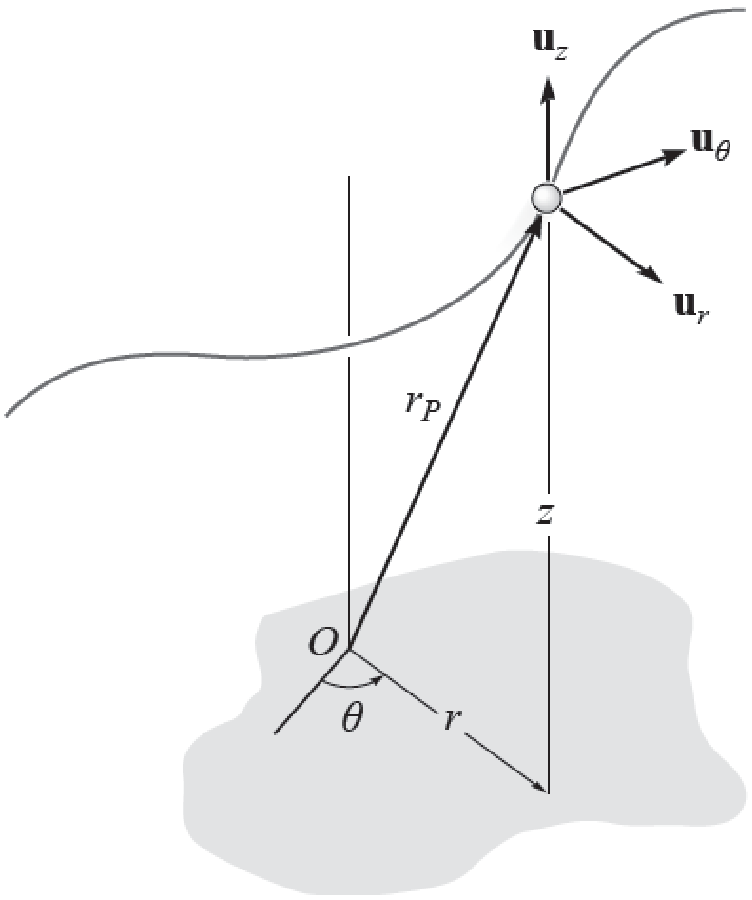
Coordenadas cilíndricas

As derivadas temporais deste vetor são zero, e, portanto, a posição, velocidade e aceleração da partícula podem ser escritas em termos das suas coordenadas cilíndricas, como a seguir:

$$\mathbf{r}_P = r\mathbf{u}_r + z\mathbf{u}_z$$

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta + \dot{z}\mathbf{u}_z$$

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{u}_\theta + \ddot{z}\mathbf{u}_z$$



2.8 – Movimento curvilíneo: componentes cilíndricas

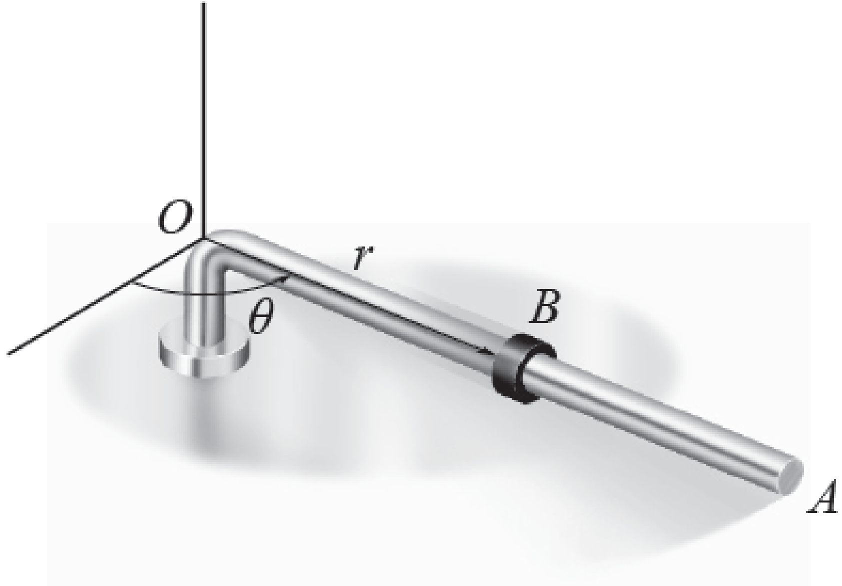
- Exemplo: A barra *OA* gira no plano horizontal de tal maneira que

$$\theta = (1{,}00)t^3$$

Ao mesmo tempo, o anel *B* está escorregando para fora ao longo de *OA* de maneira que

$$r = (100)t^2 \text{ mm}$$

Se em ambos os casos *t* é dado em s, determine a velocidade e a aceleração quando *t* = 1,00 s.

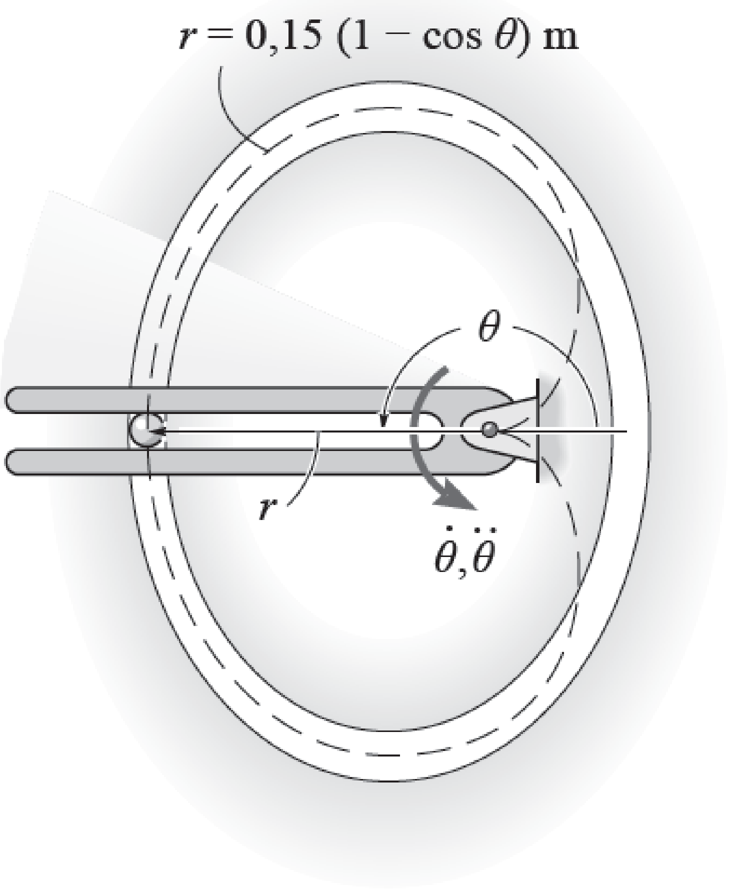


2.8 – Movimento curvilíneo: componentes cilíndricas

- Exemplo: Devido à rotação da barra bifurcada, a bola desloca-se pela fenda, descrevendo uma trajetória que em parte está no formato de uma cardioide,

$$r = (1{,}00 - \cos\theta)\ \mathrm{m}$$

Onde θ é dado em radianos. Se a velocidade da bola é 1,20 m/s e sua aceleração é 9,00 m/s^2 no instante em que θ=180°, determine a velocidade angular e a aceleração angular da bifurcação.



(a)

Figura 12.35