

Mecânica I (FIS-14)

Prof. Dr. Ronaldo Rodrigues Pelá

Sala 2602A-1

Ramal 5785

rrpela@ita.br

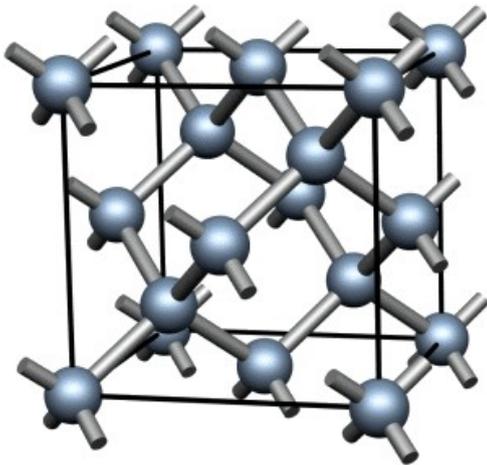
www.ief.ita.br/~rrpela

Mecânica

- Mecânica: estuda o estado de movimento (ou repouso) de corpos sujeitos à ação de forças
 - Estática: estado de equilíbrio (repouso ou movimento uniforme)
 - Dinâmica: movimento acelerado
 - Cinemática: descrição do movimento (aspectos geométricos e temporais)
 - Cinética: análise das forças que causam o movimento

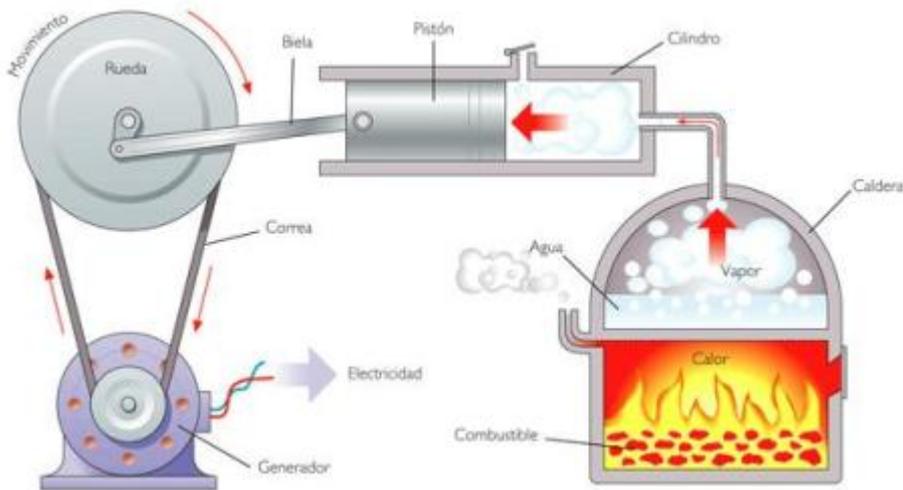
6 – Teoria Cinética dos Gases

- Teoria cinética dos gases
 - Ramo da Mecânica Estatística
- Mecânica Estatística
 - Ponte entre as leis fundamentais da Mecânica (Clássica e Quântica) e a Termodinâmica
 - Aplica teoria de probabilidade para um número grande de partículas
 - Ligação entre a descrição microscópica do sistema (Mecânica, Eletromagnética) e Macroscópica (Termodinâmica)



6 – Teoria Cinética dos Gases

- Historicamente, a Termodinâmica se desenvolveu como uma ciência autônoma no esforço de produzir máquinas térmicas



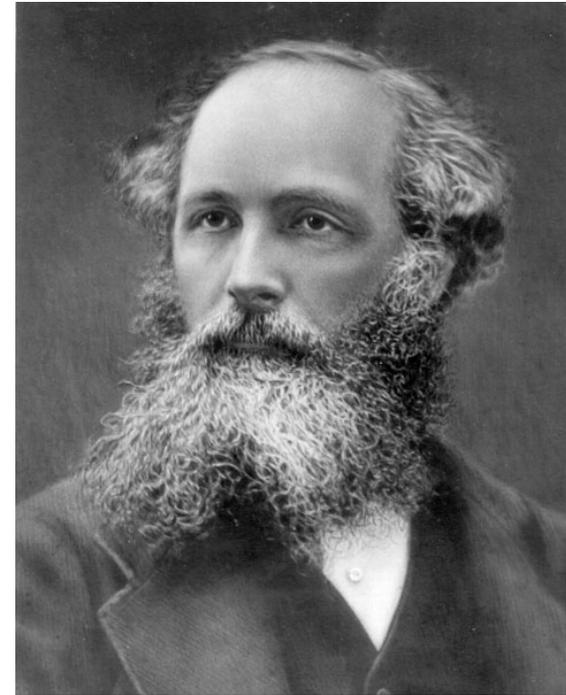
6 – Teoria Cinética dos Gases

- Carnot chegou à segunda lei da Termodinâmica antes de conhecer o caráter cinético do calor
- Havia uma desvincunlação entre a Termodinâmica e a sua fundamentação em termos das leis gerais que regem o movimento das partículas (as quais compõem os sistemas macroscópicos)



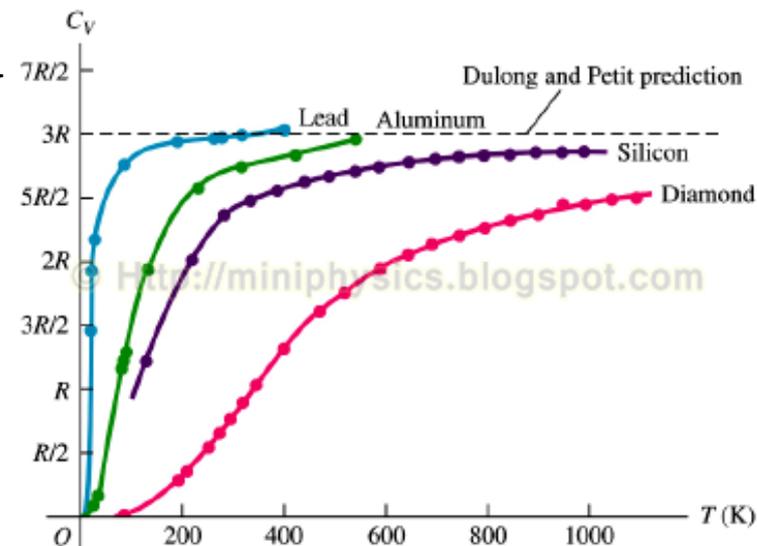
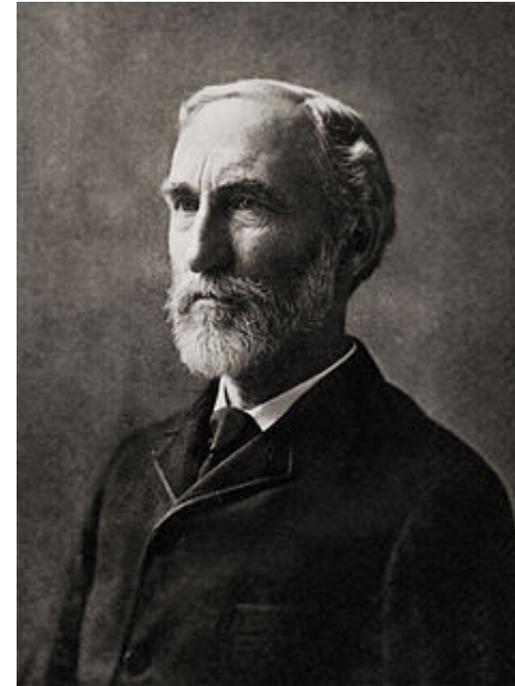
6 – Teoria Cinética dos Gases

- A investigação pioneira em Mecânica Estatística foi o cálculo da distribuição das velocidades moleculares
 - Maxwell, 1859
- Boltzmann: trabalho seminal para o desenvolvimento da Mecânica Estatística
 - Caráter estatístico da irreversibilidade
 - Conexão entre entropia e desordem



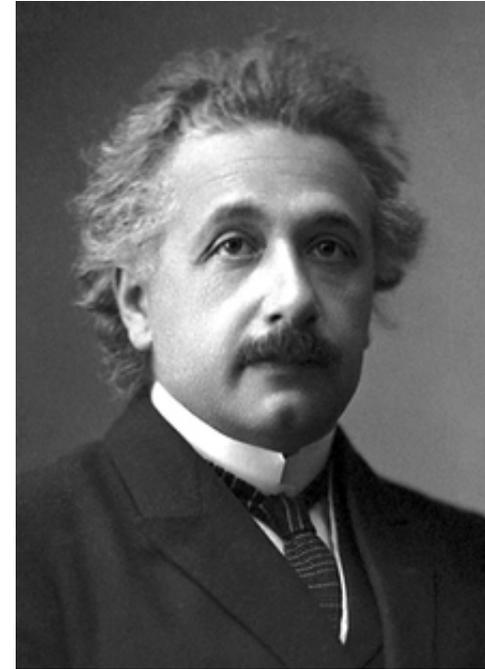
6 – Teoria Cinética dos Gases

- Gibbs: sistematizou esta ciência em termos mais próximos da forma encontrada nos textos modernos
- Entretanto no fim do século XIX, descobriu-se que a capacidade térmica dos sólidos tende a zero quando T tende a zero
 - Incompatível com a Mecânica Estatística baseada na Mecânica Clássica
 - Com isso, Gibbs e outros físicos notáveis perderam suas convicções sobre a validade da Mecânica Estatística



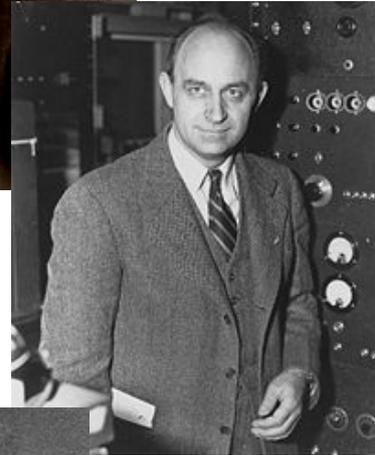
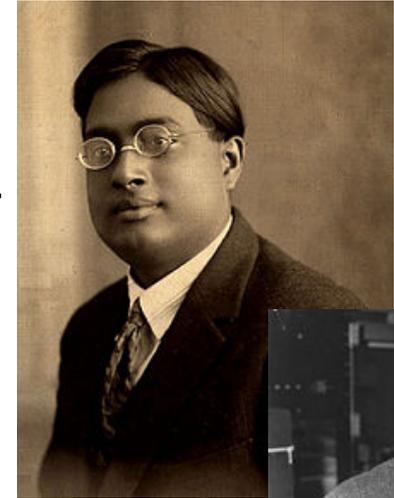
6 – Teoria Cinética dos Gases

- Coube a Einstein, em 1907, mostrar que a diminuição da capacidade térmica de sólidos com a Temperatura é decorrência da Mecânica Quântica
- Em 1912, Debye detalhou a proposta de Einstein e conseguiu obter um excelente acordo entre as previsões da Mecânica Estatística e os resultados experimentais



6 – Teoria Cinética dos Gases

- Extensões da Mecânica Estatística para incluir corretamente os fenômenos foram feitas em 1924 por Bose, cujo trabalho foi generalizado em 1925 por Einstein e em 1926 por Fermi
- A fundamentação do trabalho de Fermi em termos da Mecânica Quântica foi feita em 1926 por Dirac.



6.1 – Introdução

- Neste capítulo, veremos:
 - Modelo do gás ideal
 - Equipartição da Energia
 - Distribuição de Maxwell-Boltzmann
 - Verificação experimental
 - Livre percurso médio das moléculas

6.1 – Introdução

- Alguns problemas que vamos resolver

2. Um gás, com volume V , tem N_a átomos de massa m_a e N_b átomos de massa m_b . A velocidade quadrática média dos primeiros átomos é $v_{rms,a}$.
 - a) Deduza uma expressão para a pressão exercida pelo gás.
 - b) Suponha que $N_a = N_b$, e que os dois tipos de átomos se combinem para formar moléculas diatômicas. Qual será a pressão do novo gás quando ele tiver a temperatura anterior à reação?
3. Calcule o calor específico molar a volume constante de um gás ideal constituído de moléculas diatômicas, à temperatura $T = hv/2k_B$, sendo v a frequência de vibração das moléculas.
4. Dois líquidos sofrem uma transição do estado miscível para o estado não-miscível. Acima da temperatura T_{tr} eles são miscíveis e abaixo dela eles não mais o são. Um recipiente, em um banho térmico à temperatura T variável, contém um mol de cada líquido. Inicialmente a temperatura esta acima de T_{tr} e os líquidos estão dissolvidos um no outro. Baixada a temperatura, no ponto de transição T_{tr} os dois líquidos se separam, ocupando cada qual metade do volume total. Mostre que o calor liberado para o banho térmico durante a transição é

$$Q = 2RT_{tr} \ln 2$$

6.1 – Introdução

- Nosso roteiro ao longo deste capítulo
 - Modelo do gás ideal
 - Equipartição da Energia
 - Distribuição de Maxwell-Boltzmann
 - Verificação experimental
 - Livre percurso médio das moléculas

6.2 – Modelo do gás ideal

- Gás ideal

- Partículas sólidas que só interagem através de colisões elásticas (supostas instantâneas)

- Num gás real, as interações intermoleculares podem ser desprezadas?

- $6,0 \times 10^{23}$ moléculas em $0,0224 \text{ m}^3$ CNTP

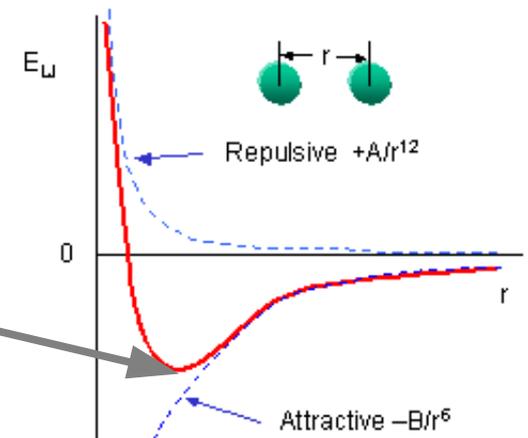
- Uma molécula a cada $3,7 \times 10^{-26} \text{ m}^3$

- Distância média entre as moléculas

- 33 Angstroms

- ~ 10 vezes o diâmetro molecular

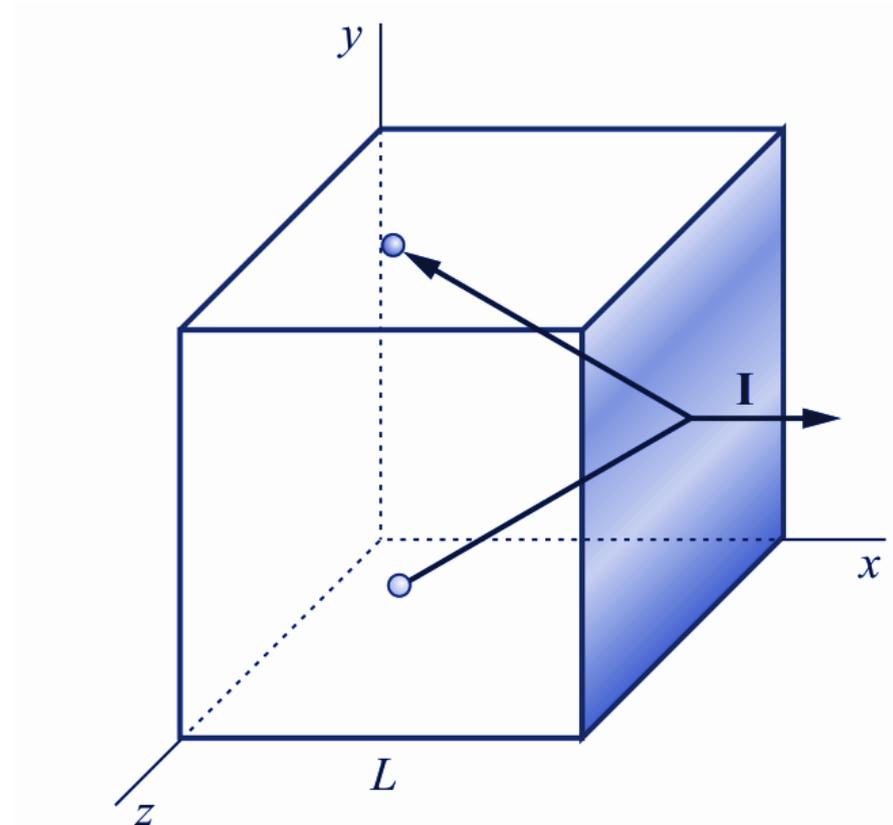
Está bem longe do mínimo e a curva tende a zero muito rapidamente



6.2 – Modelo do gás ideal

- Gás ideal
 - Uma molécula colide com a parede e sofre um impulso $I = 2m|v_x|$
 - Durante um intervalo de tempo Δt , a molécula colide com a parede sombreada um número de vezes igual a: $\frac{|v_x|\Delta t}{2L}$
 - Força média

$$f = \frac{I}{\Delta t} \frac{|v_x|\Delta t}{2L} = \frac{mv_x^2}{L}$$



6.2 – Modelo do gás ideal

- Gás ideal

- Força média na parede

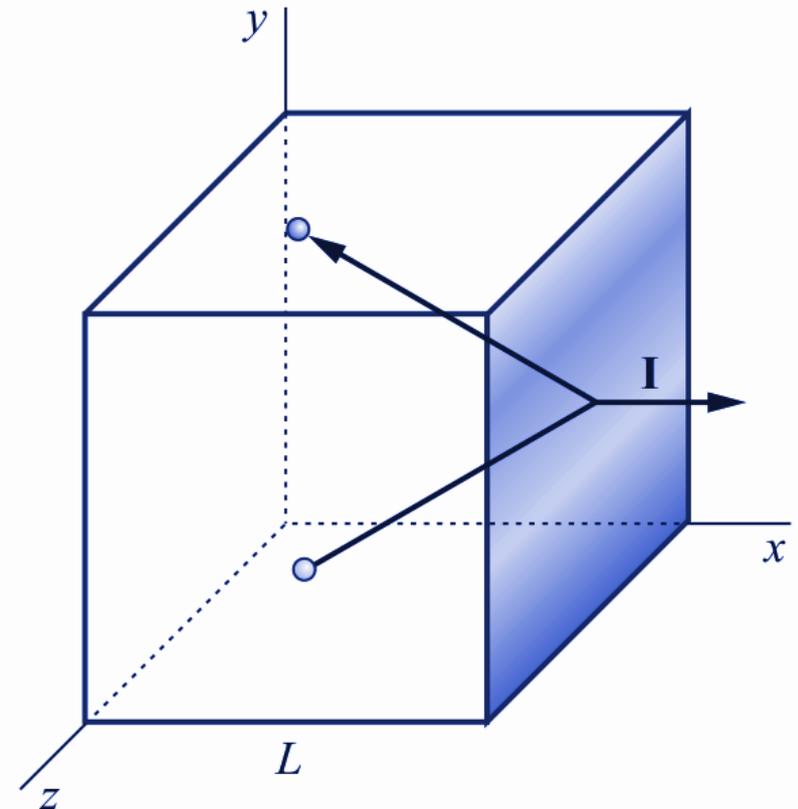
$$F = N \langle f \rangle = \frac{Nm \langle v_x^2 \rangle}{L}$$

- Pressão sobre a parede

$$P = \frac{F}{L^2} = \frac{Nm \langle v_x^2 \rangle}{L^3} = \frac{Nm \langle v_x^2 \rangle}{V}$$

Como $\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle$

$$PV = \frac{Nm \langle v^2 \rangle}{3}$$



6.2 – Modelo do gás ideal

- Gás ideal

- Energia cinética translacional

$$K_{trans} = \frac{1}{2}Nm\langle v^2 \rangle$$

$$PV = \frac{2K_{trans}}{3}$$

- Comparando com $PV = Nk_B T$

$$PV = Nk_B T$$

$$K_{trans} = \frac{3}{2}Nk_B T$$

6.2 – Modelo do gás ideal

- Gás ideal
 - Energia cinética translacional

$$K_{trans} = \frac{3}{2} N k_B T$$

- Velocidade média quadrática

$$m \langle v^2 \rangle = 3 k_B T$$

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3 k_B T}{m}}$$

6.2 – Modelo do gás ideal

- Gás ideal

- Gás monoatômico

$$U = K_{trans} = \frac{3}{2}Nk_B T$$

- Capacidade térmica

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = \frac{3}{2}Nk_B$$

$$C_p = \frac{5}{2}Nk_B$$

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{5}{3}$$

6.2 – Modelo do gás ideal

- Exemplo: Um cubo de volume $1,0 \text{ cm}^3$ tem gás nitrogênio a $1,0 \text{ atm}$ e 22°C . Estime o número de colisões moleculares sobre cada face do cubo a cada segundo.

6.2 – Modelo do gás ideal

- Solução:

- A caixa contém N moléculas de nitrogênio

$$N = \frac{pV}{k_B T} = \frac{10^5 \times 10^{-6}}{(1,38 \times 10^{-23})(295)} = 2,456 \times 10^{19}$$

- Número de colisões com a parede

$$N \frac{\langle |v_x| \rangle \Delta t}{2L}$$

- Velocidade rms

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} = 512 \text{ m/s}$$

6.2 – Modelo do gás ideal

- Solução:

- Velocidade média (componente x)

$$\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle$$

- Aproximação $\langle |v_x| \rangle \cong \sqrt{\langle v_x^2 \rangle}$

$$\langle |v_x| \rangle = 296 \text{ m/s}$$

- Número de colisões com a parede

$$N \frac{\langle |v_x| \rangle \Delta t}{2L} = 2,456 \times 10^{19} \frac{296}{2 \times 10^{-2}} = 3,6 \times 10^{23}$$

6.3 – Equipartição da Energia

- A equação

$$K_{trans} = \frac{3}{2}Nk_B T$$

implica

$$\frac{1}{2}m\langle v^2 \rangle = \frac{3}{2}k_B T$$

$$\frac{1}{2}m\langle v_x^2 \rangle + \frac{1}{2}m\langle v_y^2 \rangle + \frac{1}{2}m\langle v_z^2 \rangle = \frac{3}{2}k_B T$$

$$\frac{1}{2}m\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{2}k_B T$$

$$\frac{1}{2}m\langle v_y^2 \rangle = \frac{1}{2}k_B T$$

$$\frac{1}{2}m\langle v_z^2 \rangle = \frac{1}{2}k_B T$$

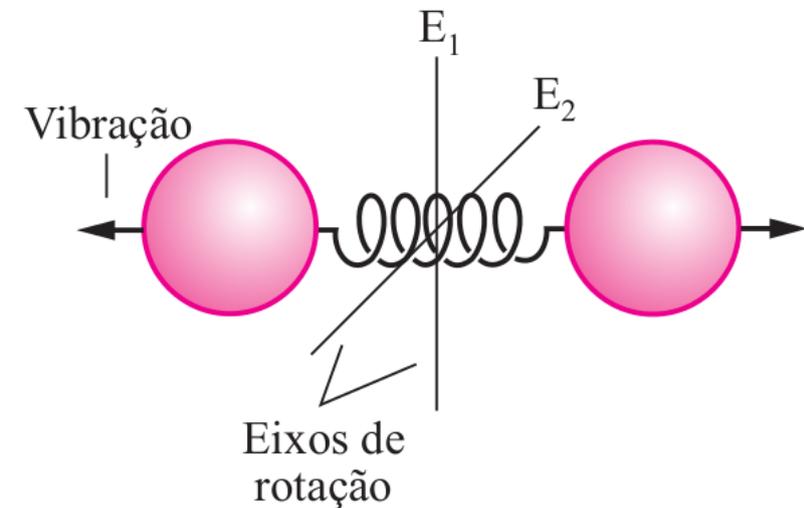
6.3 – Equipartição da Energia

$$\frac{1}{2}m\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{2}k_B T \quad \frac{1}{2}m\langle v_y^2 \rangle = \frac{1}{2}k_B T \quad \frac{1}{2}m\langle v_z^2 \rangle = \frac{1}{2}k_B T$$

- Isto significa que a cada grau de liberdade de translação do gás corresponde estatisticamente uma energia térmica de $k_B T/2$
- Este resultado é denominado equipartição da energia
 - Na verdade, este é um caso particular da lei da equipartição da energia, que vamos expor a seguir

6.3 – Equipartição da Energia

- Consideremos a molécula diatômica como exemplo
- Formas de energia
 - Translação em x
 - Translação em y
 - Translação em z
 - Rotação em torno de E_1
 - Rotação em torno de E_2
 - En. cinética de vibração
 - En. potencial de vibração



Pela Física Clássica

$$U = \frac{7}{2} N k_B T$$

6.3 – Equipartição da Energia

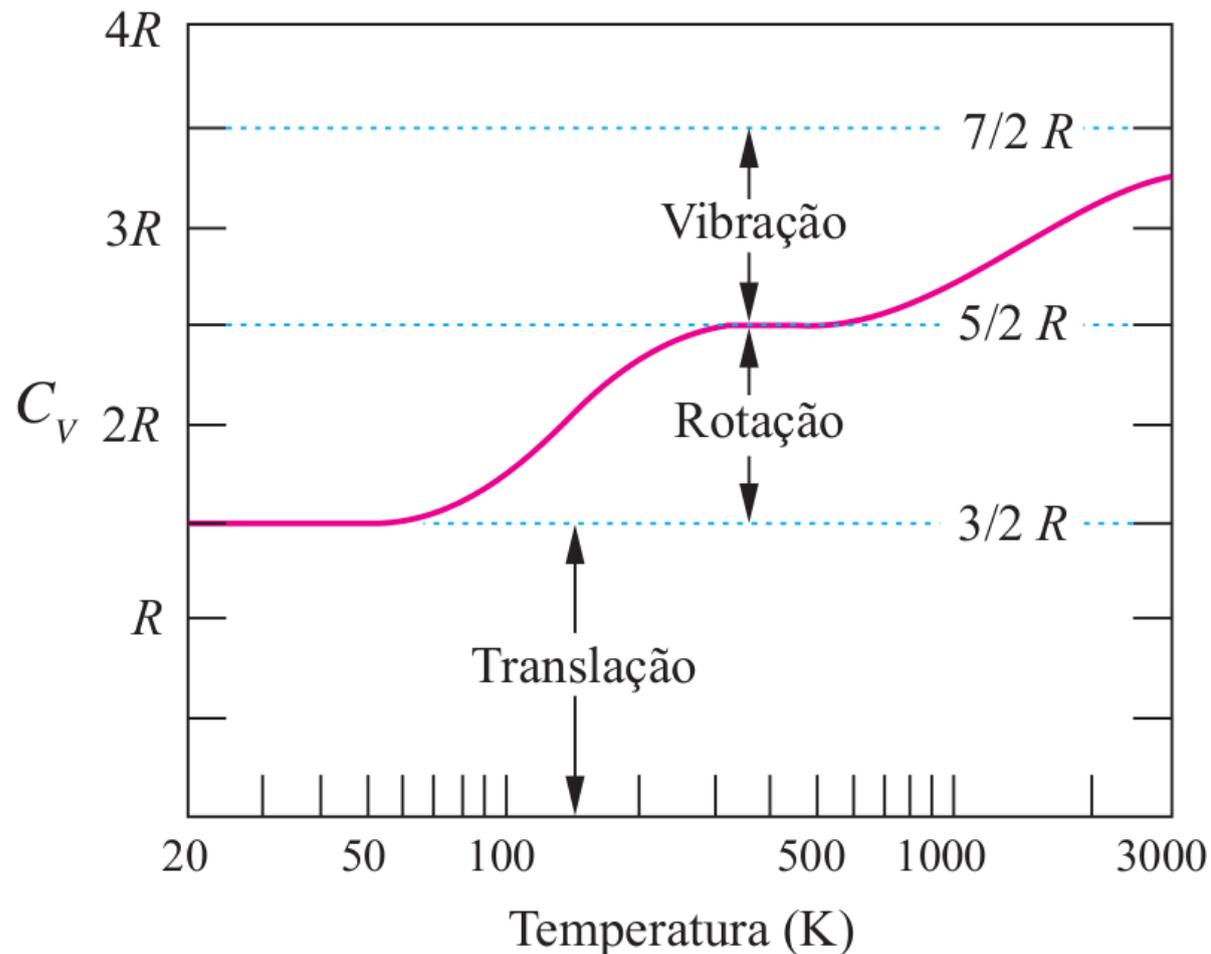
- A lei da equipartição da energia afirma que a cada mecanismo de acúmulo de energia de um sistema termodinâmico está associada uma energia térmica igual a $k_B T/2$, desde que a energia varie de forma quadrática com a variável que descreve este grau de liberdade

6.3 – Equipartição da Energia

- A Física Clássica falha para descrever a contribuição da vibração e rotação para a energia interna
- Devido a fenômenos quânticos, o modo de vibração (p.ex.) pode ficar congelado, não sendo efetivamente excitado
 - Energia de um oscilador $\left(n + \frac{1}{2}\right) hf$
 - Para baixas temperaturas $k_B T \ll hf$, o caráter discreto da energia do oscilador se torna relevante
 - Para altas temperaturas $k_B T \gg hf$, as energias de vibração formarão um contínuo e então a previsão da Física Clássica será válida

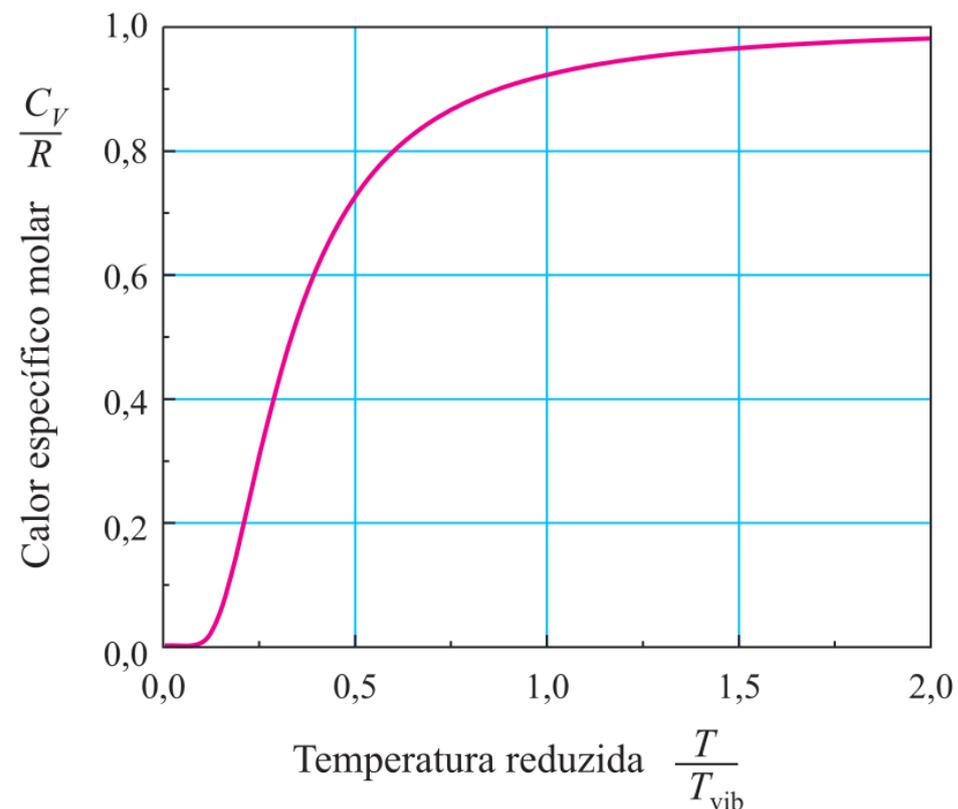
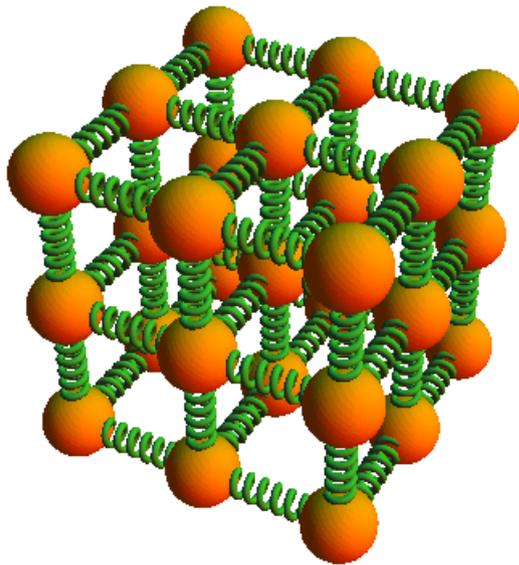
6.3 – Equipartição da Energia

- Calor específico molar a volume constante da molécula de hidrogênio



6.3 – Equipartição da Energia

- Contribuição da vibração para o calor específico molar a volume constante
 - Muito importante para sólidos



6.3 – Equipartição da Energia

- Por curiosidade, este teorema pode ser demonstrado dentro do formalismo da Mecânica Estatística
- Sendo H a função hamiltoniana de um sistema físico com muitas partículas, pode-se mostrar que

$$\left\langle x_i \frac{\partial H}{\partial x_j} \right\rangle = \delta_{ij} k_B T$$

A função hamiltoniana em muitos casos coincide com a energia total

x_i, x_j Coordenadas generalizadas ou momentos generalizados

δ_{ij} Delta de Kronecker

6.3 – Equipartição da Energia

- Por exemplo, se H varia de forma quadrática com uma variável x

$$H = \alpha x^2 + \text{outros termos}$$



Termo de energia associado a x

$$\left\langle x \frac{\partial H}{\partial x} \right\rangle = \langle 2\alpha x^2 \rangle = k_B T$$

$$\langle \alpha x^2 \rangle = \frac{1}{2} k_B T$$

Média do termo de energia associado a x

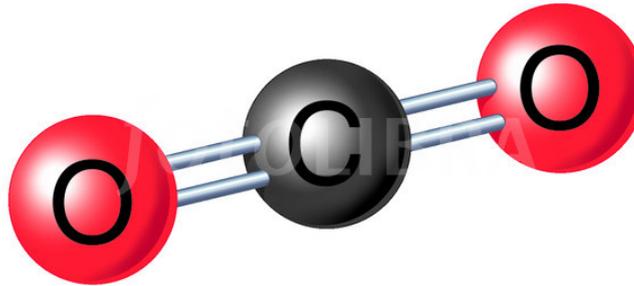
6.3 – Equipartição da Energia

- Exemplo: Calcule, no limite clássico, os calores específicos molares a volume constante e a pressão constante dos gases
 - CO_2
 - Álcool etílico $\text{H}_3\text{CCH}_2\text{OH}$

6.3 – Equipartição da Energia

- Exemplo:

- CO_2

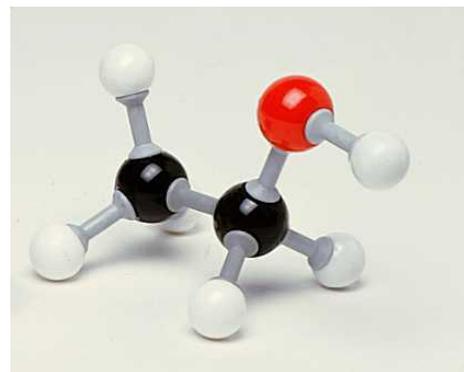


- Molécula linear

- Energia cinética translação: 3
 - Energia de rotação: 2
 - Energia cinética de vibração: 3
 - Energia potencial de vibração: 3

$$C_V = \frac{11}{2}R \quad C_p = \frac{13}{2}R$$

6.3 – Equipartição da Energia



- Exemplo:

- Álcool etílico $\text{H}_3\text{CCH}_2\text{OH}$

- Em geral, moléculas de m átomos não planas apresentam $3m$ graus de liberdade, sendo

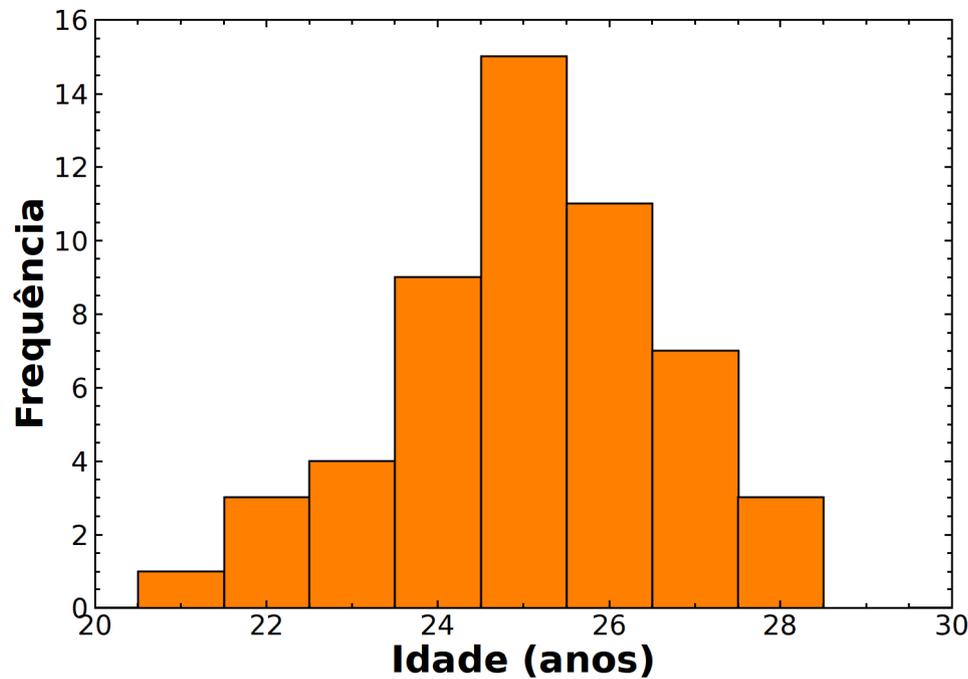
- 3 de translação
 - 3 de rotação
 - $3m-6$ de vibração

$$C_v = \frac{3}{2}R + \frac{3}{2}R + 21R = 24R$$

$$C_p = 25R$$

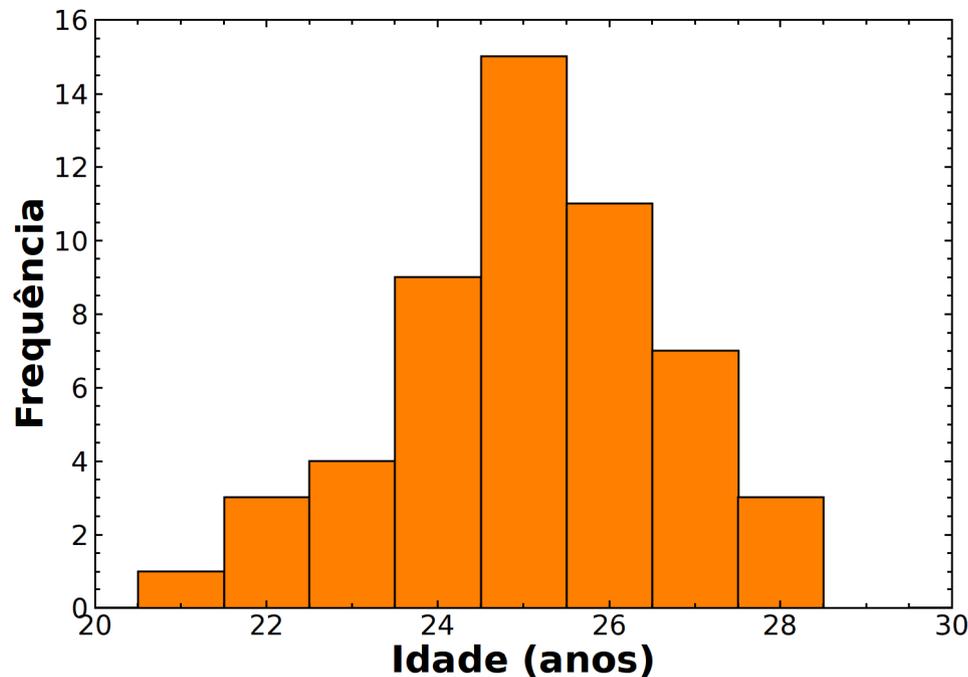
6.4 – Distribuição de Maxwell-Boltzmann

- O que é uma distribuição?
 - Para variáveis discretas: um histograma
 - Por exemplo: idade



6.4 – Distribuição de Maxwell-Boltzmann

- Seja x a idade (em anos)
 - Qual o valor médio de x ?
 - Qual o valor mais provável de x ?
 - Qual o valor médio de x^2 ?



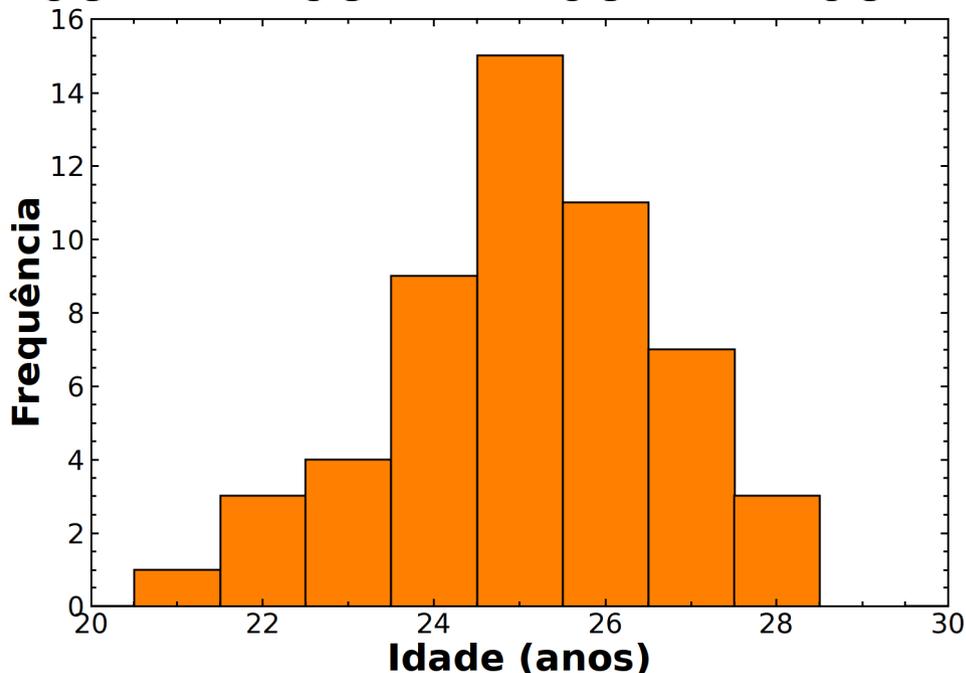
6.4 – Distribuição de Maxwell-Boltzmann

- Seja x a idade (em anos)
 - Qual o valor médio de x ?

$$\langle x \rangle = \sum p_i x_i =$$

$$\frac{1}{53} 21 + \frac{3}{53} 22 + \frac{4}{53} 23 + \frac{9}{53} 24 + \frac{15}{53} 25 + \frac{11}{53} 26 + \frac{7}{53} 28 + \frac{3}{53} 28$$

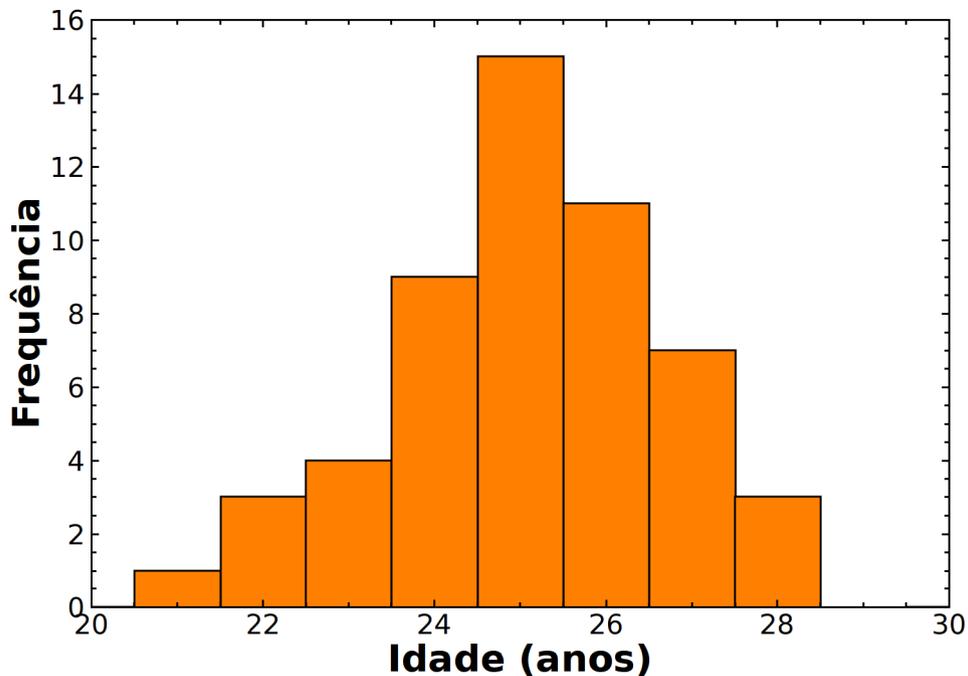
$$\langle x \rangle = 25,08$$



6.4 – Distribuição de Maxwell-Boltzmann

- Seja x a idade (em anos)
 - Qual o valor mais provável de x ?

$$x_p = 25$$

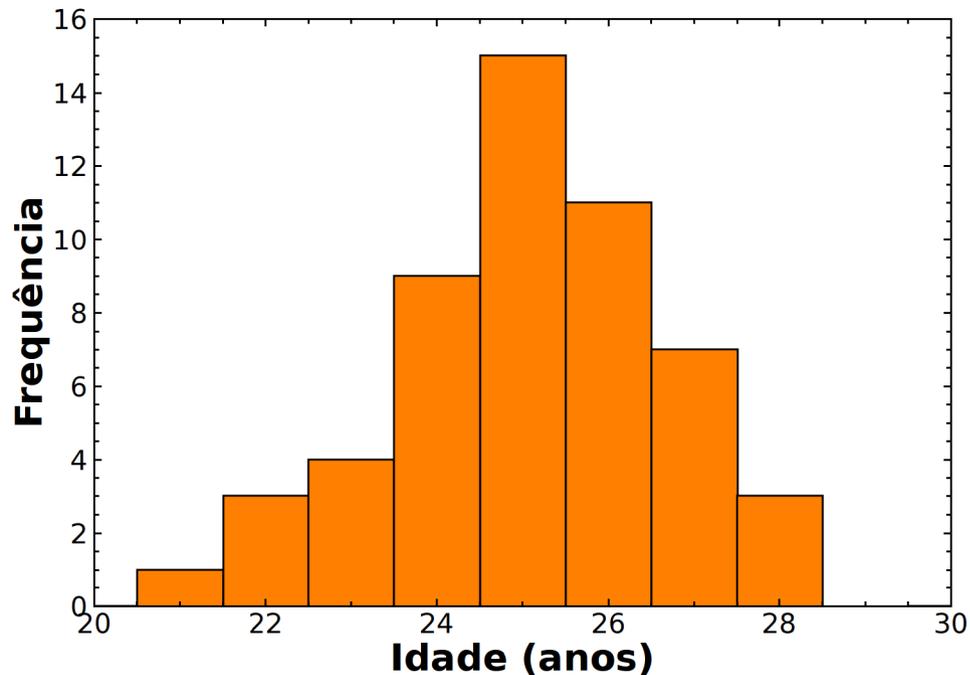


6.4 – Distribuição de Maxwell-Boltzmann

- Seja x a idade (em anos)
 - Qual o valor médio de x^2 ?

$$\langle x^2 \rangle = \sum p_i x_i^2 =$$

$$\frac{1}{53} 21^2 + \frac{3}{53} 22^2 + \frac{4}{53} 23^2 + \frac{9}{53} 24^2 + \frac{15}{53} 25^2 + \frac{11}{53} 26^2 + \frac{7}{53} 28^2 + \frac{3}{53} 28^2$$



$$\langle x^2 \rangle = 631,30$$

$$x_{rms} = \sqrt{\langle x^2 \rangle} = 25,13$$

6.4 – Distribuição de Maxwell-Boltzmann

- Vamos agora obter a distribuição de velocidades para as moléculas de um gás
 - Estaremos tratando de um caso contínuo: as velocidades
 - Neste caso, definimos uma função densidade de probabilidade p , de modo que
 - p é sempre não negativa $p(v) \geq 0$
 - A probabilidade de encontrar uma partícula com velocidade entre v e $v+dv$ é $p(v)dv$

6.4 – Distribuição de Maxwell-Boltzmann

- No caso contínuo, temos

Caso discreto



Caso contínuo

$$\sum_i p_i = 1$$



$$\int_0^{\infty} p(v)dv = 1$$

$$\langle x \rangle = \sum_i p_i x_i$$



$$\langle v \rangle = \int_0^{\infty} vp(v)dv$$

$$\langle x^2 \rangle = \sum_i p_i x_i^2$$



$$\langle v^2 \rangle = \int_0^{\infty} v^2 p(v)dv$$

6.4 – Distribuição de Maxwell-Boltzmann

- A distribuição de Maxwell-Boltzmann é dada por

$$f(v) = 4\pi N \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/(2k_B T)}$$

- $f(v)$ é uma função densidade de probabilidade?
 - Para ser exato, não
 - $f(v)dv$ mede a quantidade de partículas com velocidade entre v e $v+dv$
 - $f(v)/N$ é uma função densidade de probabilidade

6.4 – Distribuição de Maxwell-Boltzmann

- Vamos tentar obter $f(v)$ de forma aproximada
- Para tanto, considere um gás formado por N moléculas e com energia total E
 - E e N são fixos
- Por simplicidade, vamos considerar que cada molécula pode ocupar um conjunto discreto de “níveis de energia” (estados)

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k$$

- Por simplicidade, para facilitar a dedução, vamos tomar $k = 3$
- O caso genérico nos leva essencialmente ao mesmo resultado final, mas é mais complicado =)

6.4 – Distribuição de Maxwell-Boltzmann

- Ficamos então com 3 estados: $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$
- Suponha que cada estado esteja ocupado com um certo número de partículas: n_1, n_2, n_3
- Veja que, por hipótese, as grandezas seguintes estão fixadas

$$N = n_1 + n_2 + n_3 \quad E = n_1\varepsilon_1 + n_2\varepsilon_2 + n_3\varepsilon_3$$

- Mas somente com estas 2 equações (acima), ainda não conseguimos obter n_1, n_2 e n_3
 - Temos 2 equações e 3 incógnitas
- Vamos utilizar agora o fato de que a entropia é máxima

6.4 – Distribuição de Maxwell-Boltzmann

- Vamos assumir que a entropia é dada por

$$S = k_B \ln W$$

sendo W o número de configurações

- Esta expressão é demonstrada em cursos de Mecânica Estatística, mas vamos assumi-la como verdadeira
- Questão: quanto vale W ? Com um pouco de análise combinatória, concluimos:

$$W = \frac{N!}{n_1!n_2!n_3!}$$

- Permutação de 3 elementos N vezes com repetição de n_1 , n_2 e n_3 termos

6.4 – Distribuição de Maxwell-Boltzmann

- Assim

$$S = k_B \ln N! - k_B \ln n_1! - k_B \ln n_2! - k_B \ln n_3!$$

- Supondo que N , n_1 , n_2 e n_3 são muito grandes, vamos usar a aproximação de Stirling

$$\ln A! \cong A \ln A$$

– Veja uma prova desta aproximação no último *slide*

- Portanto

$$S = k_B N \ln N - k_B n_1 \ln n_1 - k_B n_2 \ln n_2 - k_B n_3 \ln n_3$$

6.4 – Distribuição de Maxwell-Boltzmann

- Dada a entropia

$$S = k_B N \ln N - k_B n_1 \ln n_1 - k_B n_2 \ln n_2 - k_B n_3 \ln n_3$$

- Precisamos encontrar n_1 , n_2 e n_3 tal que a entropia seja máxima e que a energia total e a quantidade de partículas sejam fixas

$$N = n_1 + n_2 + n_3 \quad E = n_1 \varepsilon_1 + n_2 \varepsilon_2 + n_3 \varepsilon_3$$

- Solução: usar multiplicadores de Lagrange

6.4 – Distribuição de Maxwell-Boltzmann

- Assim, usando α e β como multiplicadores de Lagrange:

$$\frac{1}{k_B} \frac{\partial S}{\partial n_1} - \alpha - \beta \varepsilon_1 = 0 \qquad \frac{1}{k_B} \frac{\partial S}{\partial n_2} - \alpha - \beta \varepsilon_2 = 0$$

$$\frac{1}{k_B} \frac{\partial S}{\partial n_3} - \alpha - \beta \varepsilon_3 = 0$$

Solução:

$$n_1 = e^{-1-\alpha} e^{-\beta \varepsilon_1} = C e^{-\beta \varepsilon_1}$$

$$n_2 = e^{-1-\alpha} e^{-\beta \varepsilon_2} = C e^{-\beta \varepsilon_2}$$

$$n_3 = e^{-1-\alpha} e^{-\beta \varepsilon_3} = C e^{-\beta \varepsilon_3}$$

Agora, o que devemos fazer para obter C e β ?

Precisamos resolver as equações:

$$N = n_1 + n_2 + n_3 \qquad E = n_1 \varepsilon_1 + n_2 \varepsilon_2 + n_3 \varepsilon_3$$

Com isto, obtemos: $C = C(N, E) \qquad \beta = \beta(N, E)$

6.4 – Distribuição de Maxwell-Boltzmann

- A entropia é dada por:

$$S = k_B \left[N \ln \left(\frac{N}{C} \right) + \beta E \right]$$

- Mas, como

$$\frac{dS}{dE} = \frac{1}{T}$$

$$\frac{1}{T} = k_B \beta - k_B \frac{N}{C} \frac{dC}{dE} + k_B E \frac{d\beta}{dE}$$

Pode-se mostrar que $-\frac{N}{C} \frac{dC}{dE} + E \frac{d\beta}{dE} = 0$

Assim $\beta = \frac{1}{k_B T}$

6.4 – Distribuição de Maxwell-Boltzmann

- Quantidade de partículas em cada estado

$$n_1 = C e^{-\varepsilon_1/(k_B T)} \quad n_2 = C e^{-\varepsilon_2/(k_B T)} \quad n_3 = C e^{-\varepsilon_3/(k_B T)}$$

- Assim, a função distribuição é

$$f(E) = A e^{-E/(k_B T)}$$

- Sendo A uma constante de normalização
 - Na verdade, A deve levar em conta também a degenerescência do estado com energia E
 - Não levamos em conta isso na nossa dedução, por simplicidade

6.4 – Distribuição de Maxwell-Boltzmann

- Quantidade de partículas com velocidades

entre v_x $v_x + dv_x$
 v_y $v_y + dv_y$
 v_z $v_z + dv_z$

$$f(v_x, v_y, v_z)dv_x dv_y dv_z = A e^{-m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)/(2k_B T)} dv_x dv_y dv_z$$

- Impondo $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(v_x, v_y, v_z)dv_x dv_y dv_z = N$

$$A = N \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2}$$

6.4 – Distribuição de Maxwell-Boltzmann

- Quantidade de partículas com velocidade entre v e $v + dv$
 - Abuso de notação: usar a mesma letra f

$$f(v)dv = 4\pi v^2 A e^{-m(v^2)/(2k_B T)} dv$$

$$f(v) = 4\pi N \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/(2k_B T)}$$

6.4 – Distribuição de Maxwell-Boltzmann

- Com isto, podemos encontrar
 - Valor rms da velocidade

$$v_{rms} = \sqrt{\int_0^{\infty} v^2 \frac{f(v)}{N} dv} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$$

- Valor médio

$$v_m = \int_0^{\infty} v \frac{f(v)}{N} dv = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}}$$

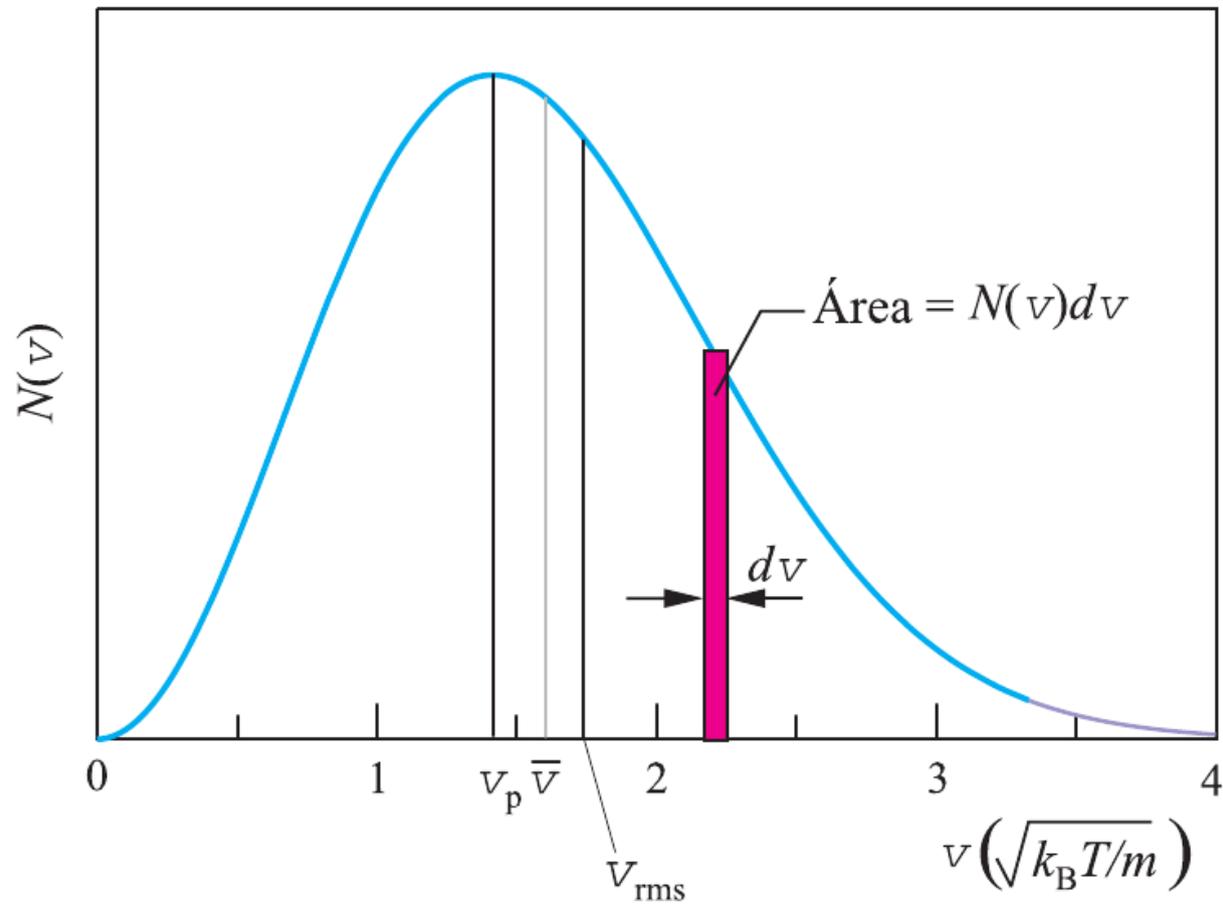
- Valor mais provável

$$f'(v_P) = 0 \quad v_P = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}$$

- As contas serão feitas na lista de exercícios

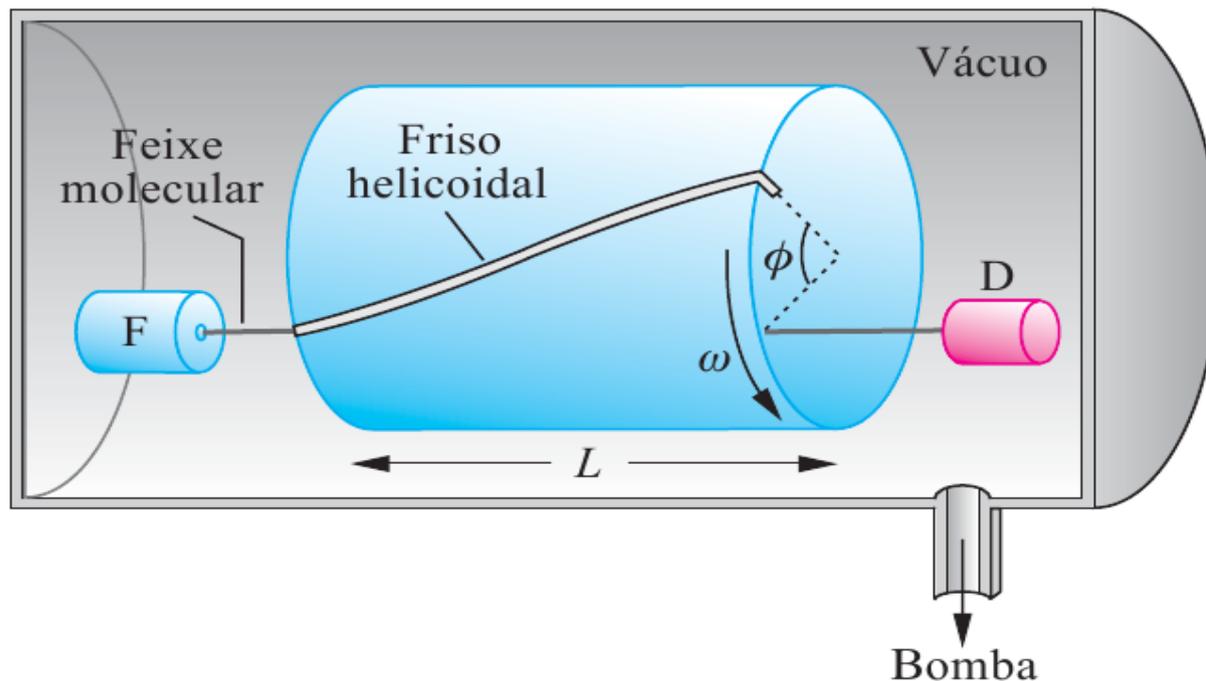
6.4 – Distribuição de Maxwell-Boltzmann

- Curva



6.4 – Distribuição de Maxwell-Boltzmann

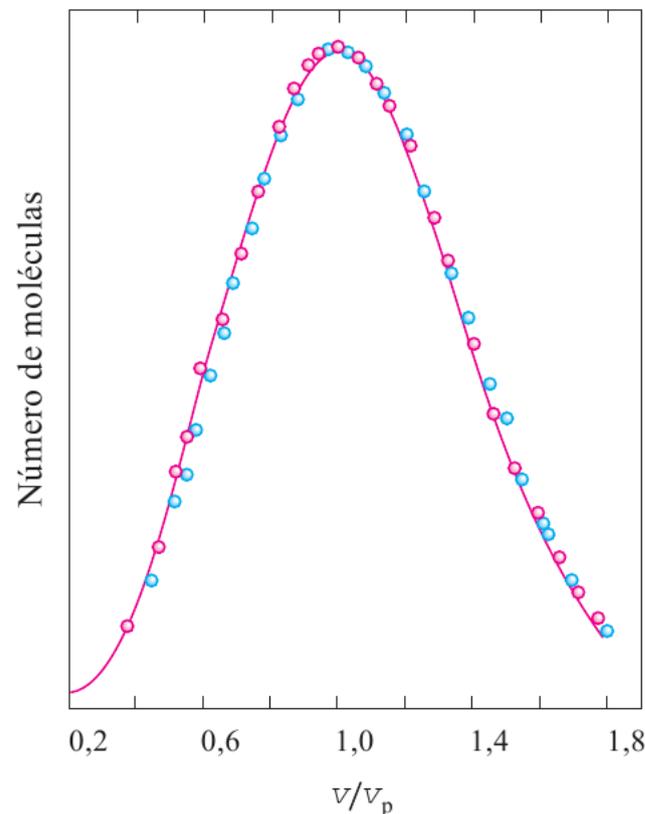
- Verificação experimental
 - Uma verificação precisa da distribuição de velocidades moleculares prevista por Maxwell só pode ser feita em 1955, por R. C. Miller e P. Kusch



$$v = \frac{\omega L}{\phi}$$

6.4 – Distribuição de Maxwell-Boltzmann

- Verificação experimental
 - Distribuição observada (para duas temperaturas diferentes)

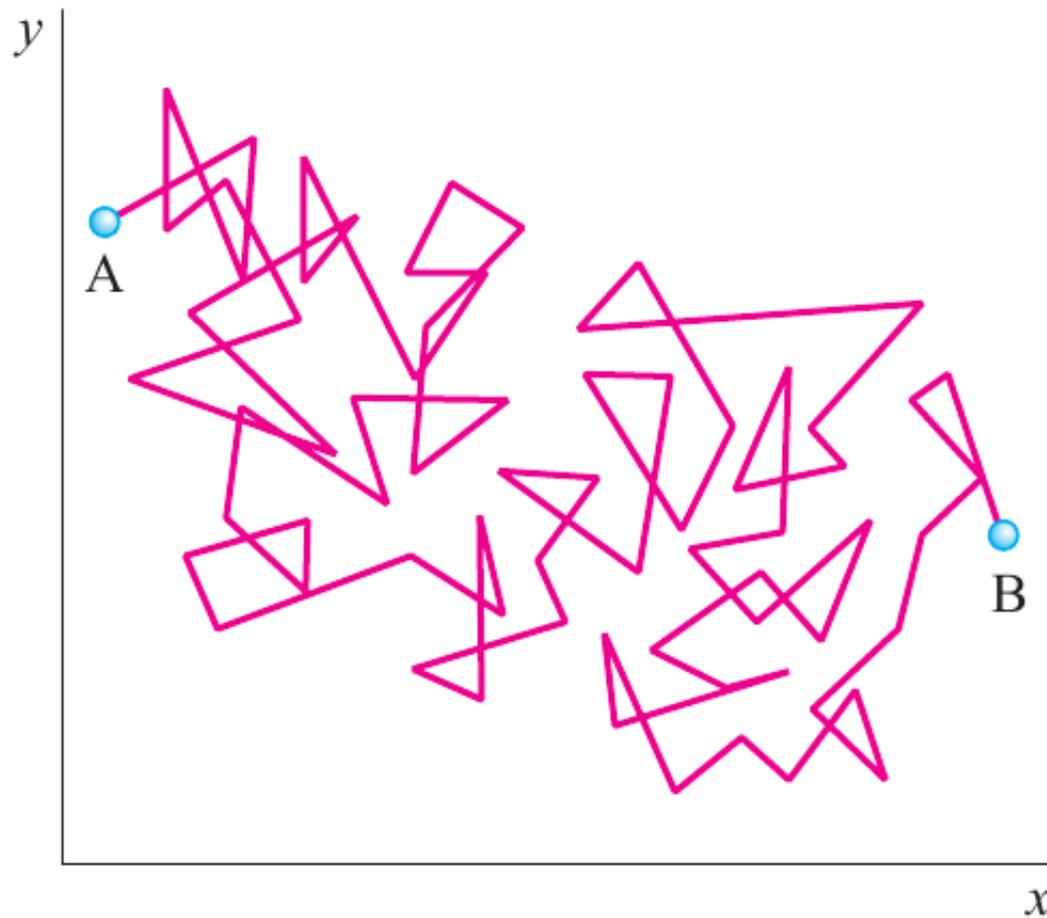


6.4 – Distribuição de Maxwell-Boltzmann

- Verificação experimental
 - A distribuição das velocidades das partículas que saem do forno é proporcional a $v f(v)$
 - Isto porque a probabilidade de uma partícula escapar do forno é proporcional à frequência com que ela colide na parede que, por sua vez é proporcional a v . Daí o fator v extra que aparece.

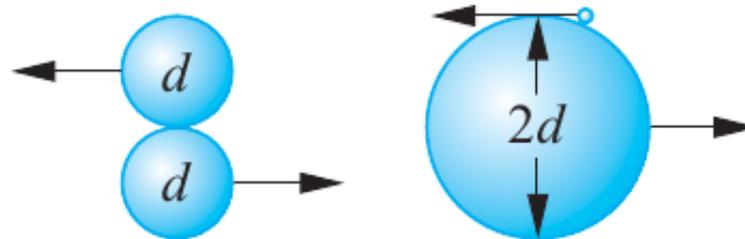
6.5 – Livre Caminho Médio

- Movimento de uma molécula num gás



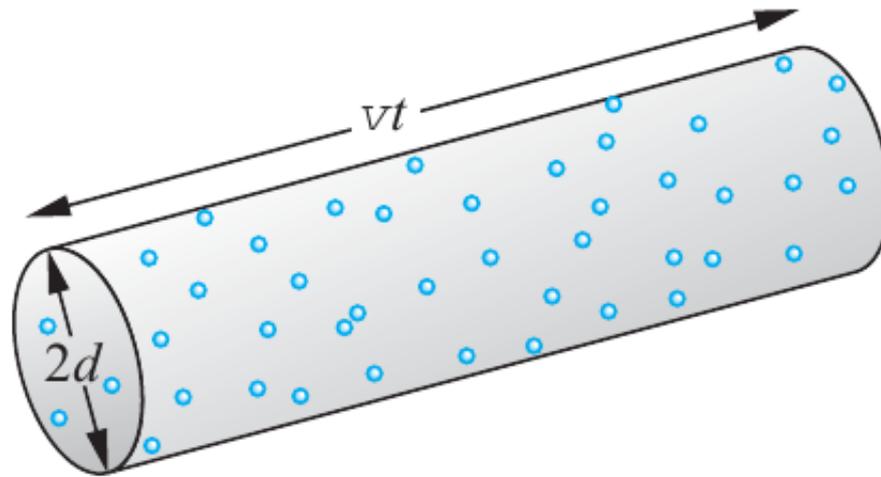
6.5 – Livre Caminho Médio

- Questão: quanto uma molécula percorre em média entre duas colisões sucessivas?
 - Livre caminho médio
- Modelo
 - Trocar duas esferas de diâmetro d
 - Por uma esfera de diâmetro $2d$



6.5 – Livre Caminho Médio

- A molécula num certo intervalo de tempo t “varre” um cilindro



$$N_{col} = n(\pi d^2)vt$$

$$\lambda = \frac{vt}{N_{col}} = \frac{1}{n\pi d^2}$$

6.5 – Livre Caminho Médio

- Na verdade o resultado anterior está incorreto, pois precisamos considerar o movimento relativo das moléculas
- Valor exato do livre caminho médio

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}n\pi d^2}$$

6.5 – Livre Caminho Médio

- Exemplo: a molécula de nitrogênio tem diâmetro efetivo $d = 0,315$ nm. Obtenha o tempo médio entre as sucessivas colisões de uma molécula à temperatura de 295 K e à pressão atmosférica.

6.5 – Livre Caminho Médio

- Solução:

- Livre caminho médio

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}n\pi d^2} = \frac{k_B T}{\sqrt{2}\pi d^2 p} = 91,7 \text{ nm}$$

- Tempo entre duas colisões $t = \lambda/v_m$

- Velocidade média

$$v_m = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}} = 472 \text{ m/s}$$

- Portanto

$$t = 0,194 \text{ ns}$$

Apêndice

- Fórmula de Stirling
 - Válida para n “grande”

$$\ln n! = \ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + \dots + \ln(n-1) + \ln n$$

$$\ln n! \cong \int_1^n \ln(x) dx = n \ln n - n + 1 \cong n \ln n$$


Soma “superior” da integral