



Funções Exponencial, Logarítmica, Trigonométrica e Hiperbólica

---

**Exercício 1.** Determine todas as soluções complexas de cada uma das seguintes equações:

1.1.  $e^w = 1 + i$

1.2.  $e^w = -2$

1.3.  $e^{2z-1} - 1 = 0$

**Exercício 2.** Descreva a imagem dos conjuntos abaixo sob a transformação exponencial:

2.1. da reta  $y = x$

2.2. do quadrado de vértices  $0, 1, 1 + i$  e  $i$ .

**Exercício 3.** Sob quais condições vale a igualdade  $\overline{e^{iz}} = e^{i\bar{z}}$ ?

**Exercício 4.** Encontre todas as soluções de:

4.1.  $\sin z = 2i$

4.2.  $\tan z = \frac{1 - 2i}{5}$

4.3.  $\cosh z = \sinh z$

**Exercício 5.** Determine a derivada das seguintes funções:

5.1.  $\sin(z^2)$

5.2.  $\cosh(iz + e^{iz})$

5.3.  $\sin(z) \sinh(z)$

**Exercício 6.** Determine as partes real e imaginária da função  $f$ . Determine onde  $f$  é analítica.

6.1.  $f(z) = \sin(\bar{z})$

6.3.  $f(z) = \text{Log}(i + z^2)$

6.5.  $\tanh(z + 1)$

6.2.  $f(z) = \exp(1/z)$

6.4.  $\text{cossec}(iz)$

6.6.  $\text{tg}(1/z)$

**Exercício 7.** Para cada função, determine o maior subconjunto de  $\mathbb{C}$  em que a função é analítica e neste conjunto determine  $f'(z)$ . Faça um esboço dos conjuntos.

7.1.  $\text{Log}(z^2 - 1)$

7.2.  $\text{Log} \frac{e^z + 1}{e^z - 1}$

7.3.  $\text{Log}(\text{Log}(z^2 - 1))$

**Exercício 8.** Considere a função

$$f(z) = \begin{cases} (1 + z) \text{Log } z, & z \neq -1, \\ 0, & z = -1. \end{cases}$$

8.1.  $f$  é contínua em  $z = -1$ ?

8.2.  $f$  é derivável em  $z = -1$ ?

**Exercício 9.** Verifique as identidades conforme o exemplo.

### Exemplo

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

- Escreva a equação como  $\sin^2 z + \cos^2 z - 1 = 0$ .
- Defina uma função com o lado esquerdo  $\psi(z) = \sin^2 z + \cos^2 z - 1$  e note que é uma função analítica.
- Derive  $\psi$  obtendo  $\psi'(z) = 2 \sin z \cos z - 2 \cos z \sin z = 0$ .
- Use o resultado

“ $f$  analítica em  $D$ ,  $D$  conexo e  $f' = 0$  em  $D \Rightarrow f$  constante em  $D$ ”

para concluir que  $\psi(z) = k$ .

- Escolhendo  $z = 0$  verifique que  $k = 0$ .

**9.1.**  $\operatorname{tg}(iz) = i \tanh(z)$

**9.3.**  $\exp(\operatorname{Log}(z)) = z$

**9.2.**  $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$

**9.4.**  $\exp(iz) = \cos z + i \sin(z)$

**Exercício 10.** Marque  $V$  (verdadeiro) ou  $F$  (falso) para as seguintes afirmações, justificando as respostas e citando os resultados usados:

**10.1.** ( ) Se  $|e^z| = 1$ , então  $z$  é um número imaginário puro.

**10.2.** ( ) Há infinitas soluções  $z$  para a equação  $e^z = w$ .

**10.3.** ( ) Para todo complexo não nulo  $z$ ,  $e^{\operatorname{Log} z} = z$ .

**10.4.** ( ) A função  $\cos(z)$  é periódica com período  $2\pi$ .

**10.5.** ( ) Existem números complexos  $z$  para os quais  $|\sin(z)| > 1$ .

**10.6.** ( ) A função  $\operatorname{Log}(z)$  é descontínua no eixo real não positivo.

Bons Estudos!!!