



Ramos do Logaritmo, Função Potência, Funções Trigonométricas e Hiperbólicas Inversas

Exercício 1. Dê um exemplo satisfazendo cada item abaixo.

1.1. $\text{Log}(z^n) \neq n \text{Log}(z)$

1.2. $\text{Log}(e^z) \neq z$

Exercício 2. Sob quais condições valem as igualdades abaixo?

2.1. $\text{Log}(zw) = \text{Log } z + \text{Log } w$

2.2. $\text{Log}(z/w) = \text{Log } z - \text{Log } w$

2.3. $(zw)^\alpha = z^\alpha w^\alpha$

*** Todas as igualdades nos Exercícios 1 e 2 são satisfeitas quando substituirmos $\text{Log}(z)$ pela função multivalorada $\log(z)$. Verifique isso!*

Exercício 3. Calcule o valor das funções:

3.1. $\text{Log}(z + 1)$

3.2. $\text{Log}(3i)$

3.3. $(1 + i)^i$

3.4. $\text{sen}^{-1}(\sqrt{5})$

Exercício 4. Nos itens abaixo admita que z^ω representa o valor principal da potência complexa definida no domínio $|z| > 0$ e $-\pi < \arg(z) < \pi$. Determine a derivada da função no ponto especificado.

4.1. $z^{3/2}$; $z = 1 + i$

4.2. z^{2i} ; $z = i$

Exercício 5. Seja $f(z)$ o ramo principal de $\sqrt{i - z^2}$.

5.1. Determine uma expressão para $f(z)$ e indique o seu domínio de analiticidade.

5.2. Verifique se $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ e $\sqrt{2}e^{i\pi/12}$ pertencem ao domínio acima.

Exercício 6. Escreva o domínio do ramo principal das funções abaixo (neste domínio, a função também será analítica). Em seguida, escreva f' .

6.1. $\log(z^2 - 1)$

6.2. z^z

6.3. $\sqrt{\log(z)}$

6.4. $\text{arc cosh}(z)$

Exercício 7. (Revisão de conceitos das semanas 4 e 5) Marque V para verdadeiro e F para falso.

7.1. () $\log i = \frac{1}{2}\pi i$

7.2. () Para todo complexo não nulo z , $e^{\text{Log } z} = z$

7.3. () Se ω_1 e ω_2 forem dois valores de $\log z$, então $\text{Re}(\omega_1) = \text{Re}(\omega_2)$

7.4. () $\text{Log} \frac{1}{z} = -\text{Log} z$

7.5. () $\text{Log} z$ é uma função inteira

7.6. () A potência z^α é sempre multivalorada

7.7. () $\cosh z = \cos(iz)$

7.8. () Se $\log z$ for puramente imaginário, então z é real.

Bons Estudos!!!

MAT46 - Funções de Variável Complexa - Lista 5

Principais resultados usados

Ramo de uma função

Uma função simples $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ que coincide com uma função multivalorada F em todo D , isto é,

$$f(z) \in F(z) \quad \forall z \in D,$$

e que é contínua em D é chamada de *ramo*.

Corte de Ramo

O conjunto que removemos do domínio de uma função multivalorada para obtermos um ramo é chamado de *corte de ramo*.

Logaritmo complexo

Se $z \neq 0$, então

$$\log(z) = \ln |z| + i(\text{Arg}(z) + 2n\pi), \quad n \in \mathbb{Z} \quad \text{e} \quad \text{Log}(z) = \ln |z| + i \text{Arg}(z)$$

A função potência

Se $w \in \mathbb{C}$ e $z \neq 0$, então a função potência z^w é definida como

$$z^w = e^{w \log(z)},$$

e seu ramo principal é

$$z^w = e^{w \text{Log}(z)}.$$

Seno e Seno Hiperbólico

$$\text{sen } z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \text{e} \quad \text{senh } z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$